UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos

Processos de Visualização e Representação de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com um *Software* Tridimensional

CAROLINA AUGUSTA ASSUMPÇÃO GOUVEIA

RIO CLARO

2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Processos de Visualização e Representação de Conceitos de Cálculo Diferencial e Integral com um *Software* Tridimensional

Carolina Augusta Assumpção Gouveia

Orientador: Profa. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2010

Comissão Examinadora

Profª. Dra. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista – UNESP – Rio Claro

Prof. Dr. Hermes Renato Hildebrand
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP - Campinas

Profª. Dra. Regina Coeli Moraes Kopke
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF – Juiz de Fora

Carolina Augusta Assumpção Gouveia

Rio Claro, 25 de maio de 2010.

Resultado: Aprovada.

Dedico este trabalho à minha família,

que está comigo em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Àqueles que são meus anjos, que iluminam o meu viver: meu pai e meu avô Matheus.

À minha orientadora Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin, pela amizade, pela ternura, pela orientação essencial em todas as etapas desta pesquisa e pela confiança em meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Hermes R. Hildebrand pelas leituras, críticas, contribuições e atenção dada em diversos momentos durante o desenvolvimento desta pesquisa; à Profa. Dra. Regina C. M. Kopke pelos momentos atenciosos, pelas palavras de carinho, por todo cuidado na leitura e pelas sugestões no desenvolvimento deste trabalho; e à Profa. Dra. Miriam G. Penteado, pelos comentários e colaboração em minhas ações investigativas.

Aos alunos-futuros professores que participaram desta pesquisa, pelo empenho e dedicação; e à Vanessa Benites e à Jú pela disponibilidade e apoio nas filmagens e fotos constituídas.

Aos meus irmãos de orientação, pela amizade, pelos inúmeros momentos de discussão, reflexão e leituras cuidadosas deste trabalho; aos membros do grupo de Formação de Professores com os quais pude compartilhar diversas reuniões e leituras; aos amigos da Pós-Graduação em Educação Matemática pelos momentos de conversa, de alegria, de aprendizado e, principalmente, pelas confraternizações.

Aos professores da Pós-Graduação em Educação Matemática que contribuíram para minha formação neste período do mestrado; aos funcionários do Departamento de Matemática e à Inajara, por estarem sempre dispostos a ajudar.

À minha mãe Márcia por estar sempre ao meu lado, por me aconselhar e dar apoio em todas as decisões, pela disposição sem fim e pelo amor incondicional.

À minha irmã Cris pelos momentos que passamos juntas, pela alegria, pelas conversas e pelo apoio contínuo.

Agradeço pela energia e pela força em todos os momentos: Vô Gouveia e vó Lena; tio Beto, tia Beth, Filipe, Henrique e Dudu; tia Laís, tio Hélcio, Junior e Clarisse; Gabi e Marina; tio

Flávio, tia Ana, Isabela, Matheus; vó Maria, Tio Theuzinho, tia Lúcia, Fred, Fábio e Flávia; Pado, Blanche, Lucas e Marcel; tia Martha e Duda; tia Mimi, tio Lulu e Pedrão; Tia Marília, Tia Lala, Tio Zeca, Júlia e Fernando; tia Telinha, Alice e Gu; tia Marisa, Matheus e Malu; tio Marcelo e Ju. E aos demais familiares, agradeço por todo o carinho...

Ao Thiago pelo amor, pelo apoio durante o desenvolvimento desta pesquisa, por estar sempre junto e pelos momentos de felicidade que compartilhamos.

Aos meus amigos "de sempre" pelo carinho, pela paciência, pela presença nos momentos de alegria e nas horas difíceis, em especial: Ana Carol, Denise, Dani, Thiago Thielmann, Tati, e Júlia pela presença marcante e pelas palavras imprescindíveis; Tauller pelos momentos que vivemos e crescemos juntos, pelo incentivo e pelo carinho; Adriana, Michelle, Mônica e Claudinha pelos momentos agradáveis e de descontração.

Ao Paulinho pela disposição, pelo carinho e pelas viagens e mudanças.

Aos amigos que fiz em Rio Claro, em especial: Vanessa Cintra e Rafael, que estiveram comigo desde os primeiros dias e pude contar em todos os momentos; Jú e Andri, companheiras em todas as atividades educacionais, como também, atividades físicas e sociais; Edinei e Escher, por serem "irmãozinhos" tão atenciosos; Luciele, Marli e Rachel por me receberem muito bem na casa delas.

À Célia e à Sandra pela atenção desde o processo de seleção para ingressar no mestrado; à Elainy e ao Marco pelo apoio nas ocasiões de "aperto" em Rio Claro; à Evelaine pela caminhada desde a graduação até os dias de hoje.

À CAPES e ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

A todos que de uma maneira ou de outra contribuíram direta ou indiretamente para a realização dessa pesquisa, muito obrigada!

RESUMO

Este trabalho apresenta as dimensões implícitas nos processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos, mediados por obras artísticas e pelo *software* K3DSurf, em uma perspectiva Semiótica, objetivando *compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).* A abordagem metodológica utilizada foi qualitativa, dada pelos momentos de Observação, Entrevistas e de aplicação de um conjunto de Atividades Exploratório-Investigativas com base em algumas reproduções de obras de arte, desenvolvidas com um grupo de alunos de graduação em Matemática da UNESP /Rio Claro. Nela identificamos diversas formas de linguagem, tais como, a escrita, a fala, os gestos e os esboços, que auxiliaram no desenvolvimento dos conceitos matemáticos em CDI. A análise dos resultados, baseados em alguns pontos da Teoria Semiótica de Peirce (2008), foi abordada por categorias de análise constituídas, explicitadas como: a primeira categoria denominada *Processos de exploração e percepção dos entes geométricos*, refere-se à Primeiridade, a segunda categoria denominada *Processos de visualização dos entes geométricos*, refere-se à Secundidade, as terceira e quarta categorias denominadas *Processos de representação dos entes geométricos* e *Processos de re-significação dos conceitos algébricos*, referem-se à Terceiridade. Essas categorias levam a inferir que, no contexto deste estudo, diversas metodologias para a aprendizagem e desenvolvimento dos conceitos matemáticos por meio da visualização e da representação foram empregadas, entre elas os aspectos de experimentação, as relações nos processos de semelhança e os momentos de socialização. Também observamos e enfatizamos a importância dos conhecimentos matemáticos dos alunos antes da realização das Atividades Exploratório-Investigativas. Esses conhecimentos prévios, em muitos momentos, direcionaram os primeiros passos para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, como também, permitiram a constituição de novos conhecimentos.

Palavras chave: Visualização; Representação; Obras Artísticas; Educação Matemática; *software* K3DSurf.

ABSTRACT

This work shows the implicit dimensions within the process of visualization and representation of mathematical concepts mediated by artistic works and by the K3DSurf software under a semiotic perspective, aiming to comprehend the process of visualization and representation of mathematical concepts in the Differential and Integral Calculus (CDI), within the context of Information and Communication Technologies (TIC).The methodological approach used in this work was the qualitative research, given in moments of observation, interviews and application of a set of Exploration-Investigative Activities, based in art works, with a group of undergraduate students in mathematics. In these activities we identified some forms of language, such as writing, speech, gestures and sketches, which helped students develop mathematical concepts in CDI. The analysis of the results, based on Peirce’s Semiotics Theory (2008), was addressed by categories of analysis that can be pointed out in the following way: the first one was called Exploration Procedures and Perception of the Geometric Entities, referent to the firstness; the second one was the Procedures of Visualization of Geometric Entities, referent to the secondness; the third and the fourth ones were called Procedures of Representation of Geometric Entities and Procedures of Re-Signification of Algebraic Concepts, both of them referent to the thirdness. These categories led us to conclude, on this research context, that many methodologies were applied in order to develop and to learn the concepts of CDI through visualization and representation, including aspects of experimentation, the relationships within the similarity processes and moments of socialization. We also observed the importance of mathematical knowledge acquired before the Exploration-Investigative Activities. This prior knowledge, in many instances, has led the first steps towards the development of other mathematical concepts, but has also allowed the creation of new knowledge.

Key-Words: Visualization; Representation; Art Works; Mathematics Education; K3DSurf software.

SUMÁRIO

Página

ÍNDICE DE FIGURAS

Página

INTRODUÇÃO

Pesquisas realizadas nos últimos anos, envolvendo a utilização didático-pedagógica das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na Educação Matemática, têm mostrado seus possíveis benefícios educacionais. Muitas propostas relevantes são encontradas nos centros de pesquisa acadêmica, porém, a cada novidade estudada, novos questionamentos passam a existir sobre essa temática, como vemos em Farias (2007), Presmeg (2001) e Miskulin (1999) e também em Souza Jr (2000), Silva (1997) e Bean (2004).

O trabalho com *softwares* educacionais desenvolvido pela pesquisadora, autora deste trabalho, inicia-se na elaboração da monografia de conclusão de Curso de Graduação em Sistemas de Informação[1], propondo uma avaliação da qualidade técnica de *softwares* educacionais. A pesquisa com *softwares* educacionais prossegue na monografia sobre Pensamento Geométrico, em que a pesquisadora obteve o título de Especialista em Educação Matemática[2] quando da investigação de uma ferramenta que auxilie na formação pedagógica e no desenvolvimento cognitivo do aluno. Esse último trabalho foi de fundamental importância no prosseguimento com pesquisas em Educação Matemática.

Como está presente na monografia elaborada durante o curso de Especialização em Educação Matemática, a pesquisadora buscou apresentar alguns elementos relacionados à representação planificada de objetos tridimensionais no computador, que, por meio de um *software,* possibilita uma rotação nos objetos, consistindo em uma aplicação impossível de ser realizada nos livros, cadernos ou quadro-negro. Apresentamos, ainda, nesse trabalho, o

---

1 A pesquisadora é bacharel em Sistemas de Informação pelo Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora, na cidade de Juiz de Fora - MG, com término 2005.
2 A pesquisadora participou do Programa de Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática: Educação Geométrica na Universidade Federal de Juiz de Fora, na cidade de Juiz de Fora – MG, com término em 2007.

desenvolvimento espacial de um aluno[3] do 8º ano do ensino fundamental, ao qual concedida a permissão para o contato com o *software* tridimensional. Esses ensaios, então, vieram acrescentar a esse aluno, o conhecimento desenvolvido pelos métodos aplicados na sala de aula convencional (GOUVEIA, 2007). Assim sendo, o que, a princípio, buscou responder alguns questionamentos sobre planificação e projeção de objetos por meio de um *software* tridimensional, também causou novas possibilidades e reflexões no campo de desenvolvimento da representação e visualização dos alunos.

Após relatar esse trabalho vivenciado por essa pesquisadora e percorrendo "caminhos" próximos a esse, percebemos muitos trabalhos de pesquisa, os quais trazem resultados importantes para a Educação Matemática.

Diante das questões que surgem e causam reflexões, a partir de cada nova leitura realizada, das novas experiências presenciadas e da presença no ambiente de discussões propiciado pelo Grupo de Pesquisa na área de Formação de Professores[4], nos propusemos a trabalhar com alunos do Curso de Graduação em Matemática[5], que serão os futuros professores das escolas de ensino fundamental, ensino médio e/ou ensino superior. Buscamos investigar a familiarização desses alunos com a tecnologia, na perspectiva de representação e visualização por meio da explicitação e da construção dos conceitos matemáticos, no contato com obras de arte.

Quando se propõe o trabalho com futuros professores e as TIC, qualquer disciplina de Matemática cursada na Graduação dos alunos de Licenciatura torna-se possível foco de nossa pesquisa. Porém, durante uma análise inicial de ementas das disciplinas, relatos informais dos professores, e, principalmente, atuais pesquisas realizadas por Programas de Pós-Graduação em Educação e/ou Educação Matemática, como os de Souza Jr (2000), Reis (2001), Bean (2004), Farias (2007), Scucuglia (2006) e Barufi (1999), o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) mostra-se como um conteúdo que representa a grande dificuldade de aprendizagem para uma quantia considerável de alunos da Licenciatura, e também, para graduandos de outras áreas.

O presente trabalho torna-se diferenciado das demais pesquisas que abordam o Cálculo Diferencial e Integral (CDI), por investigar e evidenciar as dimensões implícitas no desenvolvimento da representação espacial dos alunos, propondo a mídia tecnológica – o computador, como uma alternativa didática na aprendizagem da disciplina e propõe a

3 A pesquisadora ministrava aulas de apoio para este aluno, referente ao conteúdo de Matemática.

4 Grupo de Formação de Professores coordenado pela Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin e Profa. Dra. Miriam G. Penteado, UNESP/Rio Claro - SP – site: http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/

5 Trabalho realizado na Universidade Estadual Paulista. "Júlio de Mesquita Filho", campus de Rio Claro - SP.

manipulação de algumas representações das obras de arte no contexto das Atividades Exploratório-Investigativas propostas. Propiciar o desenvolvimento da visão espacial, utilizando as obras de arte como objeto de visualização representação, significa permitir ao aluno uma compreensão universal do objeto ou do ambiente em que vive.

Para tanto, faz-se necessário uma nova forma de explorar o significado das funções matemáticas, proporcionando dimensões matemáticas, pedagógicas e didáticas ao conhecimento matemático dos alunos de Matemática. Para os professores em formação, uma didática significativa é ainda mais relevante, pois serão esses profissionais, em um momento posterior, os responsáveis pela aplicação do conteúdo de CDI para novos estudantes e/ou expansão dos conhecimentos em novas pesquisas na área Matemática. E ainda com mais ênfase, serão profissionais que conhecerão novas estratégias didáticas, como o uso das TIC.

Essa proposta, apesar de focar, inicialmente, os futuros professores, também trabalha com futuros bacharéis, pois durante o curso CDI I os alunos ainda não haviam feito a escolha pela área a ser seguida e o projeto pedagógico aplicado, desde 2006, no curso de Matemática[6], a ser observado nessa pesquisa, propõe que

> [...] antes que o aluno decida pelo bacharelado ou pela licenciatura, ele deve ter tido experiências com metodologias específicas da licenciatura. Não se trata de oferecer-lhe uma disciplina de conteúdo pedagógico com metodologia específica da licenciatura para que ele compare com outra de conteúdo matemático, com metodologia do bacharelado. Trata-se de oferecer-lhe oportunidade de comparar metodologias distintas em disciplinas de mesmo objetivo, principalmente as de conteúdo matemático. (REESTRUTURAÇÃO, 2006, p. 6)

Optamos também por delimitar o conteúdo desse trabalho para o cálculo de volume e área de superfícies de revolução. Nossa justificativa se dá pelo conceito geométrico implícito a esse conteúdo pelos autores nos livros de Cálculo com Geometria Analítica e também por ser um conteúdo pouco explorado nas aulas de CDI I, cuja extensa ementa da disciplina não possibilitou um trabalho mais denso.

OBJETIVO E QUESTÃO DA PESQUISA

O objetivo dessa pesquisa consiste em **compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em Cálculo Diferencial e Integral, no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação.**

[6] UNESP/Rio Claro

Baseando-se nesse objetivo indicamos a seguinte questão de investigação:

Quais são as dimensões implícitas nos processos de visualização e de representação de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação?

A questão de investigação da presente pesquisa relaciona-se a aspectos que serão igualmente investigados, tais como: as diferentes formas pelas quais os alunos de licenciatura em Matemática relacionam-se com objetos matemáticos tridimensionais - referente à representação e à visualização de sólidos e superfícies de revolução; estabelecimento de relações entre a didática utilizada pela professora nas aulas de CDI I e a representação geométrica – motivada pelas obras artísticas, objetos manipuláveis a *software* em três dimensões (3D), com o conteúdo matemático sobre sólidos de revolução.

ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada pela Introdução, cinco Capítulos, Considerações Finais, Referências, Anexos e Apêndice. De maneira sucinta, apresentamos cada um deles, para um primeiro contato com a pesquisa desenvolvida.

Assim, na **Introdução** trazemos o contexto geral em que está inserido a pesquisa. O **Capítulo 1** discorre sobre a revisão de alguns trabalhos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral objetivando compreender como é feita a abordagem dessa disciplina nas salas de aula e tecer considerações em relação à visualização neste contexto.

Os **Capítulos 2 e 3** abordam questões acerca das, respectivamente, Tecnologias de Informação e Comunicação e dos processos de Representar e Visualizar, explicitando elementos de obras artísticas e trazendo alguns elementos da teoria Semiótica.

O **Capítulo 4** contém toda a descrição da metodologia e dos procedimentos metodológicos e relaciona-se diretamente com o **Capítulo 5** por esse apresentar a descrição de alguns excertos compostos pelos dados constituídos no desenvolvimento da presente pesquisa, acompanhado, principalmente, por uma Análise dos Dados baseada na teoria Semiótica.

Em seguida, apresentamos, nas **Considerações Finais**, uma retomada sucinta de todo o processo dessa pesquisa, abordando, sobretudo, nossas inferências sobre os caminhos que delineam respostas à questão de investigação, qual seja: Quais são as dimensões implícitas nos processos de visualização e de representação de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação?

Por fim, trazemos o conjunto de **Referências** utilizadas nessa pesquisa, como também, em **Anexo**, os elementos presentes na Entrevista realizada com os Alunos e as questões e objetivos das Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas com eles. No **Apêndice**, apresentamos o manual do *software* K3DSurf, que foi consultado pelos Alunos.

1. CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA VISÃO DOS EDUCADORES

Ao propor um capítulo intitulado “Cálculo Diferencial e Integral na Visão dos Educadores” buscamos inserir o leitor no contexto geral em que o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é trabalhado e pesquisado nos centros de formação superior em nosso país.

Inicialmente, discorreremos sobre a revisão de algumas dissertações de mestrado e teses de doutorado em Educação e Educação Matemática, como também artigos publicados nos encontros de educadores. Em seguida, apresentaremos uma idéia geral do material presente em alguns livros de CDI, os quais permitirão compreender como essa disciplina é abordada nas salas de aula e as mudanças didáticas que pudemos observar.

Apontaremos, por fim, nossas considerações sobre o foco dado ao trabalho em relação à visualização na disciplina de CDI pelos diversos autores consultados.

1.1. PROPOSTAS DE ENSINO EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste tópico apresentaremos algumas propostas de ensino em CDI por meio da revisão de algumas Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado em Educação e Educação Matemática.

Essa abordagem justifica-se porque o desenvolvimento do nosso trabalho apóia-se, primeiramente, em educadores e pesquisadores que, ao longo desses anos, vêm desenvolvendo pesquisas que buscam atenuar as dificuldades de estudantes no aprendizado das disciplinas, de Cálculo Diferencial e Integral e na formação de futuros professores.

É nesse contexto de pesquisa, também, que buscamos meios para entender e justificar o objetivo do nosso trabalho de *compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em CDI, no contexto das TIC.*

Souza Jr. (2000) apresentou argumentos que consideramos importantes na justificativa do projeto que organizamos. Em sua tese de doutorado, seu objetivo constitui a compreensão da produção de saberes de um grupo que está envolvido em um trabalho coletivo.

O estudo dos conceitos de Cálculo foi relevado por esse autor no momento em que ele diz sobre o grande número de reprovações e evasões de estudantes universitários no ensino do Cálculo. Notamos ainda reclamação de professores e alunos de outra área com relação à inexistência de esforços por parte dos professores regentes das turmas de CDI para tornar a disciplina interessante ou proveitosa. (SOUZA JR., 2000)

O autor argumentou que, apesar desse fato ocorrer, podemos encontrar discussões sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo, como no caso dele, que em sua pesquisa, mostrou um interesse na inserção do computador como uma ferramenta didática nessa disciplina. O autor realizou esse trabalho, organizando um grupo com professores de CDI, alunos da graduação e pós-graduação, e propôs uma investigação desse grupo por meio de diversos recursos pedagógicos, incluindo as TIC. A tecnologia utilizada para tanto foi o *software* Maple[7], o qual permitiu a visualização de conceitos matemáticos, a resolução de problemas e a construção de gráficos.

Devemos ressaltar que o interesse do pesquisador não se limitou ao ensino e aprendizagem de Cálculo fora da sala de aula tradicional e à inserção da tecnologia, mas também há uma proposta de cunho social, pois segundo Souza Jr., existe uma exigência do mercado de trabalho de um profissional que seja flexível, que utilize as novas tecnologias e que desenvolva projetos. E, desta forma, a articulação do ensino com pesquisa permitirá uma formação e uma preparação melhor dos alunos para oportunidades profissionais. (SOUZA JR., 2000).

O autor, ao final de sua pesquisa, chegou a uma compreensão da essência do conhecimento vindo da prática social, no qual o processo de negociação coletiva é importante para a construção dos saberes individual e coletivo.

Ao buscarmos maneiras de propor novos métodos de trabalho no Cálculo, observamos a relevância das pesquisas de Reis (2001) e de Scucuglia (2006). O primeiro autor apresentou uma relação entre as questões de intuição e rigor matemático nas disciplinas de Cálculo e

---

[7] Teceremos delalhes sobre o software Maple no próximo capítulo.

Análise para a graduação em Matemática e o segundo autor iniciou discussões sobre demonstração matemática.

O trabalho de Reis (2001) tornou-se ainda mais interessante para nós, ao apresentar a história do desenvolvimento do Cálculo, destacando a Geometria como base dos fundamentos do Cálculo e narrando que as causas para as mudanças no ensino e pesquisa desse conteúdo aconteceram por meio de falhas verificados nos fundamentos geométricos do Cálculo. Desta forma, foi buscada uma fundamentação baseada em números como uma alternativa para a Análise. (REIS, 2001). Essa fundamentação mencionada pelo autor é conhecida como Aritmetização.

Ainda nos primeiros capítulos desse trabalho, notamos que, ao iniciar o estudo dos aspectos históricos do Cálculo e da Análise, o autor já se mostrou confiante para afirmar que "é inadmissível separar intuição e rigor no ensino de qualquer conceito matemático" (REIS, 2001, p. 58). Deste modo, Reis (2001) procurou entender como os autores de livro tratam dessa questão no material didático.

Ao fazer a análise do material de Cálculo e Análise, especificamente o conteúdo de limites e continuidade, Reis (2001) apontou as crenças e valores dos autores de livros ao introduzir noções, conceitos, demonstrações e exercícios matemáticos, bem como a forma pela qual esses livros podem influenciar as aulas dos professores nos cursos universitários. Pois, segundo o autor, tanto o ensino de Cálculo quanto o ensino de Análise são influenciados pelos livros didáticos, uma vez que até professores mais experientes elaboram suas aulas e desenvolvem o conteúdo baseados integralmente nesses materiais pedagógicos. (REIS, 2001).

O pesquisador também se utilizou de entrevistas feitas com professores-pesquisadores, autores de livros de Cálculo e Análise, para buscar um objetivo comum à análise do material, e assim, corroborar com as conclusões já encontradas por ele.

Dentre as conclusões abordadas ao final do trabalho, uma delas é: o formalismo e os procedimentos que são encontrados de forma predominante nas aulas. Segundo Reis (2001, p. 196), "o ensino de Cálculo, é disfarçado sob a máscara de umas poucas figuras e gráficos que rapidamente perdem espaço para uma sequência de teoremas e propriedades".

Vemos no trabalho de Scucuglia (2006) uma proposta semelhante à pesquisa de Reis (2001) ao discutir o desenvolvimento e a necessidade da formalização matemática. Porém, a inserção do potencial das tecnologias informáticas, tanto no caráter experimental quanto nas possibilidades de demonstração foi um grande diferencial para que esse trabalho também nos orientasse.

Entender o termo demonstração, seus diferentes papéis e sua ligação com a experimentação, a visualização e a intuição constituiu-se na base fundamental para a pesquisa de Scucuglia (2006), que trabalha atividades sobre o Teorema Fundamental do Cálculo utilizando as calculadoras gráficas.

Durante o estudo da pesquisa do autor, pudemos perceber que o pesquisador concebe um coletivo pensante no trabalho com alunos de CDI, não se limitando à experimentação vinda somente da calculadora gráfica, mas a "Estudantes – com – Calculadoras – Gráficas – com – Professor – com – Lápis – e – Papel – com – Projeção (View Screen) – com – (...) – Humanos – e – Mídias". (SCUCUGLIA, 2006, p. 49). Assim, investigar o processo de experimentação utilizando calculadoras gráficas na aprendizagem de CDI faz-se orientado também por elementos fundamentais, tais como, as projeções no quadro e as fichas de trabalho.

Esse processo, como descreve Scucuglia (2006), permitiu que novas articulações de representações e visualizações interferissem no processo de produção de conhecimento matemático nos experimentos dessa pesquisa, e assim, possibilitam a discussão e a evidenciação da visualização no processo de pensamento matemático, na elaboração de inferências, conjecturas e justificativas. (SCUCUGLIA, 2006).

Ao final dessa pesquisa Scucuglia (2006) evidenciou o processo de produção do conhecimento matemático ocasionado pelas atividades de Cálculo, trabalhadas com as diversas mídias inseridas em um mesmo contexto. O autor ressaltou que a utilização de alguns recursos informáticos podem redefinir a necessidade e os métodos dedutivos tradicionais com a existência de provas visuais (HANNA, 2000 apud SCUCUGLIA, 2006) e sugeriu a utilização de simulações (vídeos e/ou aplicativos Aplets) como uma possibilidade no processo de experimentação. (SCUCUGLIA, 2006).

Esses elementos inseridos na educação podem complementar os resultados satisfatórios ao ensino de Matemática como encontramos no trabalho de Scucuglia (2006) ao utilizar experimentação com Calculadoras Gráficas sobre o Teorema Fundamental do Cálculo. Como o próprio autor escreveu, optou-se por procurar possibilitar aos estudantes conjecturar os resultados do Teorema Fundamental do Cálculo de modo experimental, com a Calculadora Gráfica, e em seguida uma demonstração mais acessível, com notações e simbologias mais simples. (SCUCUGLIA, 2006).

Entretanto, Scucuglia (2006), como os demais pesquisadores indicados até o momento, não justifica essas novas propostas didáticas de forma tão fundamentada como encontramos em Bean (2004), o qual discute como a didática e o currículo, por ele propostos, podem influenciar e conduzir o aprendizado do aluno. Para tal, o pesquisador limitou-se em explorar os Multiplicadores de Lagrange, conteúdo tratado nas aulas de Cálculo, e procurou entender as motivações, as justificativas, as preocupações e as ações dos alunos.

Para apreender o objetivo, o autor considerou dois tipos de aprendizagem dos alunos à interação dos mesmos com a Matemática: aprendizagem pessoal e aprendizagem afastada.

> Para a *aprendizagem pessoal*, focalizo as interações com a matéria nas quais o aluno demonstra um interesse em compreender ou resolver problemas incomuns. Para a aprendizagem afastada, faço recortes em torno das interações nas quais a Matemática parece ocupar um segundo plano nas preocupações e ações, deslocada por esforços vinculados à resolução de exercícios típicos na preparação para as avaliações na disciplina. (BEAN, 2004, p. 9).

Apoiado nesses conceitos de aprendizagem e com os dados constituídos na interlocução com alunos de diversos cursos da área de exatas, Bean (2004) enfatizou a importância do professor ao preparar uma aula na qual será introduzido um novo conteúdo, devendo repensar a didática na sala de aula, o modo de abordar o conteúdo, e a forma como as atividades serão propostas e como as avaliações serão feitas.

Assim, o pesquisador discutiu que o modo como o professor apresenta o conteúdo pode influenciar a motivação do aluno frente à disciplina, e ressaltou que uma explicação teórica abordada durante um período muito extenso, conduz a um aproveitamento dos alunos inferior ao desejado. Bean (2004) expõe que uma aula se torna cansativa quando há uma excessiva carga teórica e, desse modo, o aluno pode não entender o conteúdo, não saber aplicá-lo em algum problema prático ou até apresentar um descaso com a aula.

Ao final da pesquisa, dessa forma, Bean (2004, p. 183) apresentou a existência de duas propostas de ensino em uma sala de aula. Sendo uma primeira que "*utiliza técnicas* de Cálculo seguindo *procedimentos-padrão*, para resolver *exercícios típicos* com o intuito de chegar à *resposta certa"* ou de uma proposta que *"utiliza técnicas* no desenvolvimento de *estratégias próprias* para resolver *"problemas" incomuns*, em busca de *soluções* que ele mesmo tem necessidade de *justificar"*, sendo a segunda proposta à direção em que o autor se coloca.

Podemos notar que a primeira proposta de ensino nos remete à forma como o conteúdo é explorado na maioria dos livros, pelos quais muitos professores estudam e embasam suas aulas. Nesse trabalho, Bean (2004) não descreveu esses detalhes, mas Barufi (1999), como veremos em seguida, nos permitiu entender um pouco melhor essa dinâmica.

O objetivo da autora, nesse trabalho, foi entender as dificuldades existentes no ensino de CDI a partir da análise dos livros didáticos. Sendo assim, ressaltar e entender as diferenças existentes nos materiais pedagógicos pode revelar, portanto, a maneira como o professor trabalha o Cálculo e quais os resultados que ele espera alcançar.

Então, a pesquisadora, buscou definir, sob aspectos educacionais, o que se entende por conhecimento e de que modo ocorre a construção do conhecimento matemático e a negociação de significado, considerando as diferenças do trabalho de construção do conhecimento do professor de matemática e a construção de conhecimento do matemático profissional. Barufi (1999) elucidou que essa diferença existe pelo fato do matemático profissional ter por objetivo a construção do conhecimento matemático, enquanto o professor de matemática a construção de conhecimento matemático por parte dos alunos dele. (BARUFI, 1999).

O aspecto educacional do professor, abordado pela autora, não é o de simplesmente transmitir o conhecimento para o aluno, mas sim, criar situações-problema que o aluno deve buscar resolver, definida por ela como fase de recontextualização e repersonalização. Deste modo, quando o professor propiciar um ambiente no qual os alunos possam encontrar situações significativas e motivadores, permitirá a compreensão e estabelecimento de significados ao conteúdo trabalhado. Posteriomente, o professor poderá iniciar uma segunda fase de ensino matemático, que permitirá a formalização do conteúdo, entendido pela pesquisadora como o trabalho semelhante ao dos matemáticos profissionais.

Após essa fase, Barufi (1999) indicou que o professor deve ajudar o aluno a passar por uma nova fase de descontextualização e despersonalização, na qual os alunos buscarão utilizar os conhecimentos produzidos em outras situações.

Durante a pesquisa, a autora também realizou a análise de aproximadamente 24 livros de Cálculo. Barufi (1999) elabora critérios de classificação (momentos históricos vinculados a idéia do conteúdo; problematização na construção de conceitos; presença de textos ou apenas linguagem matemática; presença de figuras; gráficos e outros argumentos geométricos (visualização); utilização de intuição e lógica; e formalização) e apresenta individualmente as percepções encontradas em cada livro.

A autora questionou a questão do formalismo cobrado no curso de Cálculo. Como temos atualmente, a Geometria, percebeu que a estrutura lógico-formal não garantia a compreensão deste conteúdo, e, desta forma, mudou o modo de aplicação deste conteúdo nas salas de aula. Assim, também devemos repensar como o Cálculo pode ser abordado, de modo que permita aos alunos uma compreensão significativa do conteúdo.

Para Barufi (1999), em muitos cursos de Cálculo, percebe-se a finalidade da apresentação de uma teoria lógico-formal dedutiva, do qual pode incidir no desmerecimento de algumas idéias. Além disso, a autora ressaltou que entendemos que a maioria dos alunos que inicia o curso de Cálculo apresenta conhecimentos matemáticos sob o aspecto intuitivo, sendo contrários à linguagem lógico-formal que os professores universitários esperam praticar.

Diante das conclusões empreendidas, percebemos que Barufi (1999) retomou a necessidade de o professor apresentar o conteúdo passando pelo processo de descontextualização e despersonalização (para que o aluno consiga resolver um dado problema) e pelo processo de formalização (para que os alunos consigam resolver novos problemas). Para isso, a autora também sugeriu a inserção do computador como ferramenta de apoio ao ensino, devido à atual tecnologia presente na sociedade; às soluções já obtidas por ela em diversos campos de trabalho; e à abertura para inúmeros questionamentos, reflexões e análises que podem possibilitar a construção do conhecimento.

Assim, realizamos um levantamento de determinadas pesquisas que trabalham a disciplina CDI. Buscamos apresentar como esses autores procuraram minimizar a dificuldade no ensino e aprendizagem dos alunos, abordando as propostas de conteúdos selecionados por esses pesquisadores e aplicação de atividades desenvolvidas por eles. Porém, devemos acrescentar que a pesquisa de Barufi (1999) mostrou-se diferenciada para nós, por propor um modelo de análise de livro didático que será utilizado em nossa pesquisa, e estará presente no próximo tópico deste capítulo.

1.2. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL APRESENTADO NOS LIVROS DIDÁTICOS: O CASO DO CONTEÚDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Neste tópico, propomos um relato sobre certas impressões que obtivemos acerca do conteúdo de Sólidos de Revolução apresentado em cinco livros didáticos de CDI, buscando compreender como os autores desses livros abordam o conteúdo de acordo com aspectos relacionados à nossa pesquisa.

Como referido anteriormente, adotaremos a metodologia proposta por Barufi (1999) em sua análise dos livros didáticos. A diferença do nosso trabalho, portanto, reside no fato de que propomos evidenciar o conteúdo de Sólidos de Revolução presente nos livros de Cálculo sob a perspectiva da visualização e da representação.

Para viabilizar a pesquisa, ressaltamos que a escolha dos livros se constituiu como uma forma de entender um pouco da apresentação dos conceitos de Cálculo pelos quais a pesquisadora, durante a graduação, e os alunos, participantes da presente pesquisa, utilizaram como fonte de consulta para a construção do conhecimento em Cálculo. Desta forma, selecionamos livros publicados pelos autores Anton (2007), Stewart (2006), Guidorizzi (2001), Leithold (1994), Swokowski (1994).

Por meio das leituras realizadas nos trabalhos de pesquisadores em CDI, notamos a importância de relacionar os aspectos intuitivos e formais presentes nesse material. Baseado em Reis (2001), acreditamos que a intuição e a criatividade deveriam estar presentes no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo para que o estudante pudesse alcançar uma validação lógico-formal, independente de se tratar de uma demonstração ou desenvolvimento de um conceito. Nesse processo, ressaltamos que a abordagem representativa e de visualização é considerada por nós intrinsecamente ligada ao desenvolvimento do conteúdo de Sólidos de Revolução.

1.2.1. Os Livros Didáticos

As primeiras obras apresentadas neste tópico, compostas por Guidorizzi (2001), Swokowski (1994) e Leithold (1994) representam o primeiro contato da pesquisadora com o conteúdo de CDI em sua graduação em Matemática. Portanto, incluímos esses autores de livros didáticos nesse momento.

Em Guidorizzi (2001), no livro intitulado “Um Curso de Cálculo”, notamos um foco singular nas demonstrações matemáticas. No tópico em que situamos nossa análise, o autor utiliza conhecimentos de fórmulas matemáticas e inferimos que a apresentação do conteúdo torna ausente a aplicabilidade dele no cotidiano.

No início da apresentação do conteúdo, o autor introduz noções em geometria, indicando os termos sólidos, retas, curvas e pontos, como também fórmulas que se supõem já conhecidas pelos leitores. Em seguida, notamos que Guidorizzi (2001) continua a apresentação do conteúdo matemático preocupando-se, principalmente, com o conhecimento sistematizado que induz às fórmulas, essas, destacadas no livro como elementos utilizados pelos alunos para realizar exercícios que trazem equações e inequações nos enunciados. Desta forma compreendemos que, para Guidorizzi, o processo de representação e visualização representa um “papel coadjuvante, pois, essencialmente, os argumentos são algébricos para serem verificados nas figuras” (BARUFI, 1999, p. 108). As figuras esboçadas nesse livro são entendidas por nós como uma aplicação mínima e suficiente que busca contribuir para a compreensão do leitor.

Swokowski (1994), em “Cálculo com Geometria Analítica” inicia o tópico Sólidos de Revolução fazendo uma pequena exposição sobre a importância dos cálculos dos volumes de objetos. De maneira sucinta, o autor indica a importância desse conteúdo para resolução de diversos problemas nas ciências físicas.

Apesar de não utilizar diretamente objetos tridimensionais, Swokowski (1994, p. 400) relata que trabalhará apenas os sólidos de revolução. O autor cita formas mais simples, formadas pelo retângulo, semi-círculo e triângulo retângulo que, respectivamente, ao girar em torno do eixo, formarão o cilindro circular reto, a esfera e o cone circular reto. O autor, então, continua o desenvolvimento do conteúdo partindo para as técnicas de integração.

Desta maneira, o conteúdo é apresentado descrevendo detalhes sobre os sólidos e as diversas maneiras de calcular seus volumes. As figuras representadas no livro complementam o trabalho do autor, de forma a estarem presentes tanto na explicação do conteúdo quanto nos exercícios. Esses esboços, como notamos, estão bem elaborados e, desta forma, facilitam a visualização do estudante.

Inicialmente, a preocupação aplicativa do conteúdo em outras áreas, indicada pelo autor ao iniciar a explanação do conteúdo, não acompanha a sua exposição e dos exercícios iniciais, que parecem focar apenas a aplicação das fórmulas. Porém, alguns exercícios disponibilizados ao final desse tópico, trazem alguns problemas aplicados ao cotidiano, mas que ainda não podemos apontar como situações provocativas, que causem reflexões nos alunos e que os levem a fazer investigações matemáticas. (SKOVSMOSE, 2000)

A importância de pautarmos a análise dos exercícios no conteúdo Sólidos de Revolução, presente no livro de Skovsmose (2000), refere-se à explanação que esse autor faz sobre a inserção de uma abordagem investigativa na sala de aula.

De acordo com Skovsmose (2000), a Educação Matemática presente em diversas partes do mundo se enquadra no paradigma do exercício em que o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas, e depois os alunos trabalham com exercícios selecionados. Esses exercícios são, muitas vezes, formulados por uma autoridade externa à sala de aula e podem acabar não fazendo parte da aula de matemática em si mesma.

Entretanto, o referido autor diz que o paradigma do exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação (cenário para investigação[8]). Esse tipo de abordagem pode

---

[8] Segundo Skovsmose (2000, p.73, grifo nosso), "um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo "O que acontece se...?" do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se...?". Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O "Por que isto...?" do professor representa um desafio e os "Sim, por que isto...?" dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, **o cenário para investigação** passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo".

contribuir com o enfraquecimento da autoridade na sala de aula tradicional de Matemática e engajar os alunos em seus processos de aprendizagem e construção de conhecimento, os quais permitem também reflexões sobre a Matemática e suas aplicações, pois se passa a utilizar referências da vida real e não somente à Matemática Pura. Desta forma, acredita-se numa educação matemática com uma dimensão crítica, dando engajamento aos alunos nas ações e reflexões deles. (SKOVSMOSE, 2000).

Para entendermos melhor as idéias de Skovsmose (2000), temos na Figura 1, um quadro que faz uma distinção entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação combinando a diferença entre três tipos diferentes de referência: referência à matemática, referência à semi-realidade e referência à situação da vida real. Temos seis possíveis ambientes de aprendizagem que resultam dessa combinação. (SKOVSMOSE, 2000, p. 75).

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 1: Ambientes de Aprendizagem

“O ambiente de aprendizagem” do tipo (1) compreende exercícios do contexto da “matemática pura”. O tipo (2) caracteriza-se como um ambiente que envolve números e figuras geométricas. O ambiente tipo (3) é constituído por exercícios com referências à semi-realidade. Assim como no ambiente (3), o ambiente (4) também contém referências a semi-realidade, ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações. Exercícios baseados na vida real oferecem um ambiente de aprendizagem do tipo (5). O trabalho com projetos para Skovsmose (2000) estaria inserido em “o ambiente de aprendizagem” (6), no qual as atividades matemáticas estariam relacionadas à realidade dos alunos, proporcionando a eles realizar explorações e investigações.

“Os ambientes de aprendizagem” apresentados nos permitem uma melhor identificação das diferenças e das similaridades presentes nos exercícios trazidos nos livros, os quais estamos estudando neste trabalho. Assim, continuaremos nossas impressões com os demais livros propostos.

Leithold (1994) é autor do livro “O Cálculo com Geometria Analítica”. Esse volume trabalha com definições e teoremas que definem as fórmulas que utilizamos em nosso estudo, na parte prática desta pesquisa, para os cálculos de áreas da Superfície de Revolução e volumes dos Sólidos de Revolução. Para cada um dos teoremas enunciados, o autor aparenta uma preocupação em apresentar também pelo menos um exemplo resolvido.

No início do tópico de Sólidos de Revolução, esse livro apresenta figuras geométricas clássicas, como Cone e Esfera, exemplos de Sólidos de Revolução. Posteriormente, também são apresentadas figuras mais elaboradas, formadas por curvas que são rotacionadas em torno de um eixo.

Os esboços que encontramos sobre Sólidos de Revolução, estão disponíveis no livro, tanto em duas quanto em três dimensões, e são utilizadas como auxílio na resolução dos exercícios. Esses exercícios focam, muitas vezes, na Matemática Pura, com algumas situações artificiais que direcionam o aluno a encontrar uma solução única já esperada pelo autor. Segundo Skovsmose (2000), esse seria "o ambiente de aprendizagem" (3) da Figura 1. Logo, julgamos que a exploração da visualização e da representação para Leithold (1994), tal como deparamos em Guidorizzi (2001), está presente apenas para verificação de argumentos algébricos logicamente estruturados.

Os livros didáticos produzidos por Anton (2007) e Stewart (2006), foram incluídos nessa pesquisa por fazerem parte do material didático que os alunos, participantes da pesquisa, utilizaram ou utilizam nas aulas de CDI ou como material de apoio. Esses livros são produções atuais, mas como notaremos, não trazem uma proposta tão diferenciada, para o conteúdo de Sólidos de Revolução.

O exemplar "Cálculo" de Anton (2007), apesar de atual, assemelha-se aos livros já apresentados, como Swokowski (1994). O autor acrescenta uma introdução mais minuciosa sobre o conceito de Sólidos de Revolução, com representação detalhada de regiões planas e eixo de rotação que formam os sólidos. O desenvolvimento do conteúdo também apresenta um maior número de etapas, buscando mostrar de forma mais clara para o aluno, como se chega a uma dada fórmula, sem pular etapas muitas vezes consideradas "óbvias" por outros matemáticos.

Logo, é a partir desses problemas matemáticos que encontramos em Anton (2007) propostas para soluções, por meio de fórmulas que utilizam conceitos de Integral, para calcular área da superfície e do volume de acordo com o tipo de Sólido de Revolução que for dado, sempre utilizando as figuras como apoio à compreensão dos conteúdos matemáticos.

Como apreendemos, é de forma semelhante a Anton (2007) que Stewart (2006) – no livro "Cálculo" – trabalha esse conteúdo. O autor também faz uma breve introdução aos Sólidos de Revolução, com o uso de figuras e, tal como os demais livros, utiliza-as como ilustração aos conceitos algébricos que são explorados por esse conteúdo. Sem nenhuma proposta singular aos demais autores, notamos que os exercícios de Stewart (2006) iniciam um trabalho diferente na proposta dos exercícios desse tópico.

Baseado em Skovsmose (2000), alguns exercícios podem ser classificados como "o ambiente de aprendizagem" (5) da Figura 1, ou seja, exercícios baseados na vida real, pois se mostram mais aplicativos, como os que fazem menção à engenharia. Porém a maioria ainda está diretamente relacionada à aplicação de fórmulas que foram modeladas anteriormente.

1.2.2. Considerações sobre os Livros Didáticos

Após estudarmos o tópico "Sólidos de Revolução" e buscarmos colocar nossas impressões sobre cada livro, neste trabalho, procuramos fazer algumas considerações sobre as similaridades observadas.

Quanto ao conteúdo, decorremos no exemplar do Guidorizzi (2001) com uma proposta focada ao conhecimento da matemática pura, que diferentemente, foi desenvolvida um pouco por Leithold (1994) e Swokowski (1994). Esses autores buscaram fazer uma introdução do conteúdo que seria trabalhado, com aplicações cotidianas, mas sem incluí-las ao desenvolvimento dos cálculos trabalhados.

Anton (2007) e Stewart (2006) apresentam uma proposta mais desenvolvida no processo de descrição dos teoremas, incluindo algumas exposições mais claras das etapas envolvidas nesse processo, mas como nos demais exemplares, baseiam-se, puramente, nas fórmulas matemáticas.

Nos exercícios, ainda se percebe uma ausência daqueles que trabalhem os problemas cotidianos e que apresentem as situações nas quais os alunos sejam levados a explorar conceitos matemáticos por meio de investigações. Muito do que ainda é feito nas aulas de cálculo, baseia-se em sequência de cálculos e desenvolvimento de artifícios algébricos. Assim, o conteúdo, muitas vezes, torna-se sem sentido para alunos que acabam não entendendo nem aprendendo a proposta.

Dessas impressões, buscamos fazer uma apresentação geral do modo como o conteúdo Sólidos de Revolução foi desenvolvido por esses autores, mas ressaltamos que o nosso foco está no modo como a representação e a visualização estão colocadas nos livros didáticos. Como descrevemos, sucintamente, esse processo é contrário à nossa proposta presente, então, incluímos o seguinte tópico para iniciar a exposição das nossas idéias.

1.3. REPRESENTAÇÃO E VISUALIZAÇÃO COMO AUXÍLIO NO ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O tópico anterior nos permitiu notar como o trabalho com a representação e a visualização é pouco explorado nos livros didáticos, e com isso, as figuras passam a ter um significado maior no processo de ilustração de cálculos algébricos que estão presentes no desenvolvimento dos cursos de CDI.

Buscamos então, aproximar a representação e a visualização do processo de investigação no desenvolvimento do Cálculo, colocando esses elementos visuais como ferramentas de desenvolvimento das noções CDI. Como Reis (2001, p. 58) enuncia, a área considerada “intocável”, a Geometria, foi base para as noções de Cálculo, e, dessa forma, a passagem do Cálculo para a Análise está diretamente relacionada a ela.

O nosso trabalho almeja, então, ressaltar a importância de descobertas de estratégias de resolução e a produção de novos problemas em Cálculo, a partir da visualização e da representação que acompanham a Geometria. Assim, optamos por propor a retomada das potencialidades da Geometria, como o processo inicial de aplicações relacionadas aos conceitos CDI. O procedimento de Observação e utilização dos dados que são perceptíveis no esboço de um objeto, para a compreensão dos conceitos do conteúdo de Sólidos de Revolução, constituem-se uma primeira etapa desse processo que também permeará o restante da investigação.

A presença da Álgebra também se mostra necessária e é mais notada pela capacidade de realizar os cálculos algébricos que auxiliam no desenvolvimento dos métodos, do que pelos processos de visualização e representação como, por exemplo, a demonstração de um teorema. Assim, a Álgebra comporta a função de explicar, explorar e argumentar um dado problema. A Aritmética, além de compreender também todo o desenvolvimento, mostra-se mais atuante nos problemas que apresentam situações artificiais ou reais, trazendo resultados numéricos.

Esse processo também permite o uso da tecnologia e objetos manipuláveis, quando eles forem necessários e ajudarem no ensino. No próximo capítulo, discutiremos a inserção das TIC no contexto educacional.

2. TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA COMPREENSÃO DOS CONCEITOS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Este capítulo pretende apresentar questões acerca da inserção e da disseminação das Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC), além de também descrever aplicações realizadas por pesquisadores abordando a utilização do *software* no ensino e na aprendizagem de Matemática. Para tanto, realizamos uma revisão da literatura que aborda essa temática, na qual ressaltamos o emprego do *software* no processo educacional e destacamos o papel da tecnologia no ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Ao final, buscamos elucidar as potencialidades e as possibilidades de trabalho com o *software* K3DSurf, utilizado nessa pesquisa.

2.1. VISÃO GERAL SOBRE AS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

> A habilidade mais importante na determinação do padrão de vida de uma pessoa já se tornou a capacidade de aprender novas habilidades, de assimilar novos conceitos, de avaliar novas situações, de lidar com o inesperado. Isso será crescentemente no futuro: a habilidade competitiva será a habilidade de aprender. (PAPERT, 1994, p. 5)

Esse trecho, retirado do livro intitulado *“A máquina das crianças: repensando a escola na era da informática”*, escrito por Seymour Papert e publicado em 1994, vem mostrar que os objetivos de aprendizagem estão modificados e que novas capacidades física, intelectual e moral são requisitadas pela sociedade.

Assim, pretendemos explorar e expor alguns elementos que foram incorporados na sociedade e que vêm modificando o modo como se dão as relações entre as pessoas e as informações, sendo essa relação influenciada pelo movimento de introdução e disseminação das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Como sabemos, a tecnologia a plicada a televisão desenvolve-se com uma velocidade na qual a informação é dada com qualidade e rapidez, registrando os acontecimentos de todas as regiões do mundo e podendo repassá-los em tempo real. Já a tecnologia do video-game possibilita ao usuário participar de um jogo por meio de ambientes cada vez mais próximos à realidade. Os computadores e a *Internet* facilitam e permitem melhorias no acesso aos materiais de pesquisas e estudos, podem agilizar a realização de tarefas, são capazes de ser utilizados para diversão e, também, possibilitam o relacionamento, o contato e a aproximação de pessoas que estão geograficamente afastadas.

Neste trabalho, contudo, ressaltaremos o uso da tecnologia com foco na inserção dos computadores no processo educacional, abordando aspectos da implementação das TIC no ensino e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Assim, tomaremos o cuidado de abordar o assunto considerando que existem diferentes modos de pensar na educação por meio da tecnologia, ou seja, de "aprender *a partir da* tecnologia, aprender *acerca da* tecnologia, aprender *através da* tecnologia e aprender *com a* tecnologia". (COSTA, 2004 apud ALMEIDA, 2008, p. 100).

Além disso, consideramos que mais do que utilizar a tecnologia para a Educação,

> [...] é preciso que conhecimentos, valores, hábitos, atitudes e comportamentos do grupo sejam ensinados e aprendidos, ou seja, que se utilize a educação para ensinar sobre as tecnologias que estão na base da identidade da ação do grupo. (KENSKI, 2007, p. 43).

Esses modos de conceber as possíveis relações entre a tecnologia e o ensino, fornecem subsídios que nos permitem entender o processo de implementação das TIC na Educação, como também, os projetos aplicados desde os anos 70 até os dias atuais. Para discorrer sobre os projetos inseridos na Educação desde essa década, buscamos compreender esse processo fazendo uma breve retrospectiva histórica da implementação das TIC na Educação.

No trabalho de Almeida (2008) encontramos o modo como as TIC foram implementadas nos Estados Unidos da América (EUA), França, Portugal e Brasil. Assim como a pesquisadora, Drijvers et al (2010) também apresentam uma breve retomada histórica da implementação das TIC no exterior, destacando aspectos da fundamentação teórica das pesquisas nessa área. Já no Brasil, encontramos explicitações feitas por Borba e Penteado

(2003) entre outros autores. Destacamos que, por meio desse panorama, compreendemos um pouco da implementação das TIC na Educação.

De maneira geral, Almeida (2008, p. 123) percebe que não há diferença cronológica significativa da história da presença das TIC na Educação entre países pobres e ricos, apesar de o foco dado em cada país incidir sobre concepções políticas, contextuais e culturais.

Dessa forma, foi revelado, nos EUA, que os anos 70 ficaram marcados pelo desenvolvimento do *software* baseado em teorias comportamentalistas, que veem o uso do computador como um modo de ensinar por meio da instrução programada (*softwares* do tipo CAI - *Computer Assisted Instruction*). Já nos 80, esse uso foi inserido para provocar mudanças na Educação requisitadas pela nova sociedade - Construcionismo[9] de Papert. (MALTEMPI, 2005, p. 265).

Na França, Almeida (2008) descreve que, nos anos 70, existiu no princípio uma preocupação em formar uma sociedade informatizada e nos anos 80 focou-se o trabalho com informática a partir de uma participação mais ativa dos alunos. Em Portugal, iniciou-se uma abordagem de caráter instrumental, que foi modificada para uma perspectiva de transformação do ensino e aprendizagem. Atualmente, esses países possuem objetivos semelhantes, pois direcionam a integração das TIC ao currículo.

No Brasil, esse processo não ocorreu da mesma forma. Segundo Almeida (2008), desde a inserção e implementação das TIC, a influência dos Estados Unidos e França neste contexto não ocasionou grandes mudanças no modo de se pensar a Informática na Educação. O trabalho com a tecnologia sempre esteve direcionado para a formação, a investigação e a prática pedagógica. Porém, isso não significa que os projetos de informática educativa no Brasil sempre foram os mesmos, pelo contrário, diferentes projetos do governo foram lançados buscando aproximar a Educação da Tecnologia.

Ainda assim, percebemos que esses processos de inserção e implementação da Tecnologia no Brasil poderiam ter alcançado melhores resultados, se os projetos considerassem as diferentes realidades vivenciadas pelos brasileiros de todo o território nacional. Como reiteram Borba e Penteado (2003), no Brasil, um programa nacional de Informática torna-se adequado quando pensamos em ações isoladas, dada a dimensão do país, suas particularidades, potencialidades e necessidades de cada região.

[9] Construcionismo é "[...] tanto uma teoria de aprendizado quando uma estratégia para a educação, que compartilha a idéia construtivista de que o desenvolvimento cognitivo é um processo ativo de construção e reconstrução das estruturas mentais, no qual o conhecimento não pode ser simplesmente transmitido pelo professor para o aluno" (MALTEMPI, 2005, p. 256)

Como podemos perceber, apesar do trabalho com as TIC na Educação não ser um projeto recente, Drijvers et al (2010) observam que até os anos 90, as ferramentas tecnológicas ainda não estavam sendo utilizadas constantemente pelos educadores nos EUA e não havia um número considerável de *softwares* educacionais desenvolvidos com qualidade. Talvez, por esse motivo, continuamos a encontrar um grande problema quanto à subutilização da tecnologia, correspondente aos aspectos político-pedagógicos e de formação dos educadores (ALMEIDA, 2008) Dessa forma, um retorno à história apresenta-se como um argumento considerável que nos permite entender o quanto a Tecnologia Informática nos requer estudo e conhecimento para podermos fazer aplicações no ensino e aprender por meio dela.

Assim, consideramos significante prosseguir no desenvolvimento deste Capítulo, por meio da apresentação de alguns *softwares* utilizados na Educação atualmente. O valor dessa exposição dar-se-á pelos resultados encontrados nas pesquisas que enfatizam os limites e possibilidades das TIC no ensino e aprendizagem da Matemática. As pesquisas se mostram importantes por considerarem, em todos os processos, a complexidade dos procedimentos de inclusão da tecnologia na Educação, dado que, segundo Kenski (2007), essa cautela no desenvolvimento e aplicação dos procedimentos pode diminuir o mau uso da tecnologia para fins educacionais.

Como educadores matemáticos, devemos estar sempre atentos na constituição desses conhecimentos “quando novos atores se fazem presentes em sua investigação” (BORBA E PENTEADO, 2003, p. 49). E, dessa forma, procuramos apresentar algumas pesquisas e, principalmente, algumas atividades que esses pesquisadores desenvolveram para se trabalhar com o computador.

Fazemos isso por acreditar que os novos saberes proporcionados por essa tecnologia, assim como outros saberes que são encontrados fora da escola, deveriam estar inseridos no contexto educacional como se têm mostrado eficazes nas pesquisas e nas ações pedagógicas divulgadas por pesquisadores e profissionais de Matemática e Educação Matemática. Dentre eles, destacamos Barbosa (2009), Jacyntho (2008), Olimpio Junior (2006), Menk (2005) e Scucuglia (2006), os quais apresentam algumas propostas de ensino de CDI abordado com *softwares* educacionais, oferecendo outros modos de pensar e entender os conteúdos dessa disciplina. São projetos que acreditamos corroborar com as ideias de Papert (1994, p. 148), no qual articula que o computador deve servir sempre como um instrumento para trabalhar e pensar, realizar projetos e servir como fonte de novas ideias.

Na sequência, apresentamos alguns *softwares* que foram utilizados na abordagem de alguns conceitos de CDI sendo que eles fazem parte de algumas pesquisas de mestrado e doutorado que tiveram como preocupação a utilização das TIC no ensino e aprendizagem em CDI.

2.2. ABORDAGEM DOS *SOFTWARES* NO ENSINO E APRENDIZAGEM

2.2.1. Cálculo Diferencial e Integral no contexto dos *Softwares* Educacionais

Neste tópico, apresentamos de modo sucinto alguns *softwares* educacionais que podem ser utilizados no ensino e aprendizagem em CDI. A abordagem pela qual optamos na descrição dos *softwares* Winplot, Geogebra, Maple e Cabri-Geomètre como também da Calculadora Gráfica, dar-se-á por meio de atividades propostas e aplicadas em pesquisas da área, desenvolvidas por Barbosa (2009), Jacyntho (2008), Olimpio Junior (2006), Menk (2005) e Scucuglia (2006). Assim, visamos elucidar como se dá a inserção e utilização das TIC no contexto educacional, por meio da apresentação de atividades que obtiveram resultados satisfatórios para o campo de estudo em Educação Matemática e, principalmente, para os processos de ensinar e aprender CDI.

Barbosa (2009) buscou abordar em sua pesquisa como o coletivo formado por alunos-com-mídias produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica. Dessa forma, utilizou o *software* Winplot[10] para auxiliar nas atividades propostas, considerando-o " um programa simples, versátil e razoavelmente fácil de usar" (BARBOSA, 2009, p. 90). O Winplot também pode ser utilizado para trabalhar com funções de uma variável real e com funções de duas variáveis reais, e dentre as ferramentas disponíveis, permite utilizar a animação para variar um parâmetro específico (BARBOSA, 2009). A Figura 2 apresenta a tela do *software* com a aplicação de funções.

10 Acesso e informações pelo site: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

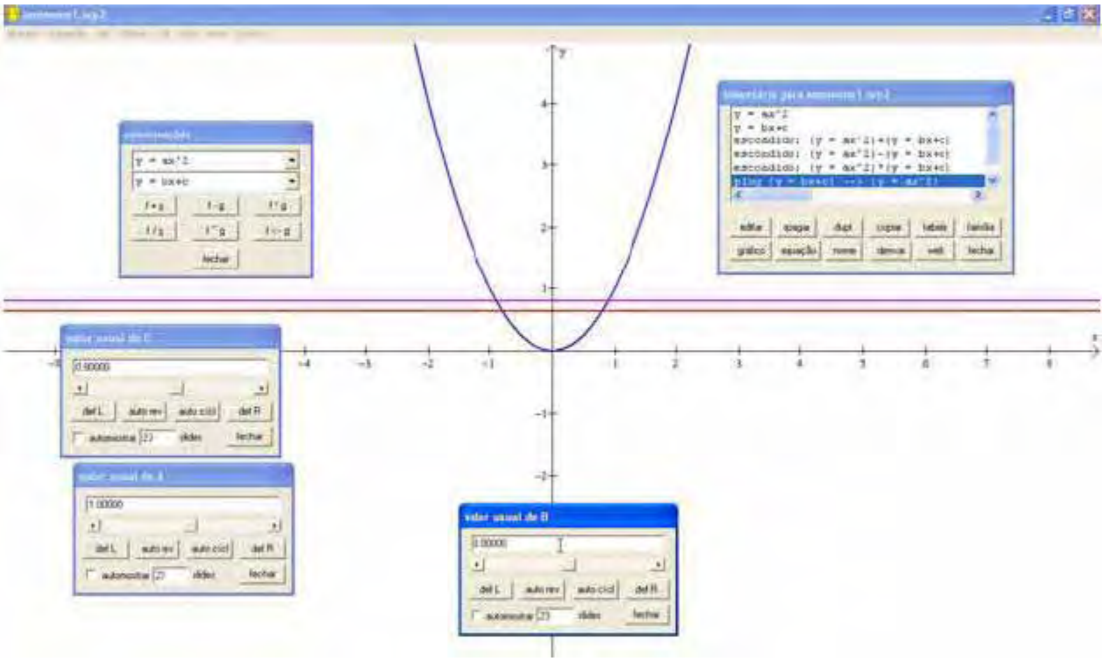


Figura 2: Desenvolvimento do exercício no *software* Winplot (BARBOSA, 2009, p.103)

Assim, dentre as atividades desenvolvidas pela pesquisadora, destacamos a primeira delas (Figura 3). Barbosa (2009, p. 99) trabalhou com a composição de uma função quadrática e outra linear com os objetivos de: verificar padrões ao animar os coeficientes a, b, e c; observar aspectos acerca do domínio e da imagem das funções; calcular as expressões algébricas das funções compostas e identificar semelhanças e diferenças entre os gráficos dessas funções.

Atividade 1

1) Insira as funções $f(x)=ax^2$, $g(x)=bx+c$ e anime os coeficientes *a*, *b* e *c*.

2) A partir do *menu* **Dois / combinações**, faça combinações de cores diferentes com essas duas funções.

   a) O que você pode observar sobre o gráfico da combinação $f <-- g$ quando os coeficientes *a*, *b* e *c* são animados?
   (**Sugestão**: Fixe dois coeficientes e anime o terceiro.)

   b) O que você pode dizer sobre a combinação $f <-- g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?

3) Na janela combinações, inverta as funções *f* e *g*, e observe o gráfico. Com esse gráfico, o que você pode dizer sobre a combinação $f <-- g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?

4) Identifique semelhanças e diferenças entre os gráficos que você obteve nos itens 2 e 3.

Figura 3: Primeira Atividade desenvolvida no trabalho de Barbosa (2009, p.101)

O resultado relatado pela pesquisadora, acerca dessa atividade, mostrou que o *software* permitiu que o aluno elaborasse uma conjectura acerca da propriedade de composição de funções somente a partir dos gráficos. Apenas na observação dos gráficos, o aluno notou que a composição de uma função quadrática resultava em uma função constante. Ele tentou explicar seu raciocínio descrevendo-o na folha de papel, e dessa forma, esclarecer o conceito à sua colega que não havia enxergado o mesmo que ele (BARBOSA, 2009).

Na mesma perspectiva teórico-metodológica de Barbosa (2009), Olimpio Junior (2006) investigou os conceitos de CDI no processo educacional por meio do *software* Maple[11], conhecidos também por Sistemas de Álgebra por Computador (CAS - *Computer Algebra System*). Nessa pesquisa, encontramos propostas, que acompanham informações sobre os recursos, as potencialidades e a complexidade que pode ser encontrada no trabalho com o *software*, a partir da utilização do computador na sala de aula.

Como Olimpio Junior (2006) descreve, neste ambiente podemos trabalhar com rotinas numéricas e funções matemáticas por meio de uma linguagem de programação, a qual também permite a plotagem de gráficos em R^2, R^3 ou C. Em um dos episódios constituídos durante a investigação, o pesquisador propõe a seguinte questão: Investigar a derivabilidade de f: R→R definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \, sen\left(\frac{1}{x}\right) \, para \; x \neq 0 \\ 0 \; para \; x = 0 \end{cases}$$

Apresentando dois momentos distintos, Olimpio Junior (2006) faz considerações acerca do trabalho de dois alunos no desenvolvimento dessa atividade, inicialmente, sem a utilização do Maple e, posteriormente, com a utilização do *software*.

Para argumentar sobre a derivabilidade da função, um dos participantes sente a necessidade de apoiar-se em informações gráficas, e propõe que isso seja feito nos dois momentos. Assim, os alunos fazem representações da função, definida anteriormente, utilizando o papel, conjugadas ao *software*. O pesquisador, então, percebe que ao empregarem o *software* Maple, o *feedback* alcançado no teste de conjecturas ocorre praticamente de forma instantânea e sem erros. (OLIMPIO JUNIOR, 2006).

Olimpio Junior procurar relatar um momento durante a exploração da função, no qual os alunos utilizaram o procedimento de plotar o gráfico, e com isso, representaram um caso absurdo dado pela visualização (Figura 4). Como auxílio do *software*, os alunos procuram

[11] Acesso e informações pelo site: www.maplesoft.com

plotá-lo em vários intervalos da mesma função, procurando entender o resultado dado pela primeira representação (Figura 5) (OLIMPIO JUNIOR, 2006). Esse caso possibilitou aos alunos compreenderem de forma correta, a maneira como a função está atuando no gráfico.

```
plot(sin(1/x)*x^2,x=-4..4);
```

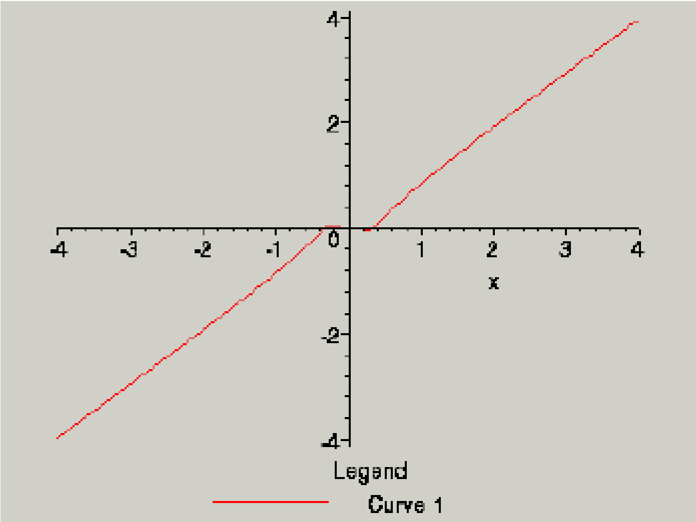


Figura 4: Representação da função desenvolvida no trabalho de Olimpio Junior (2006, p. 97)

```
plot(sin(1/x)*x^2,x=-0.2..0.2);
```

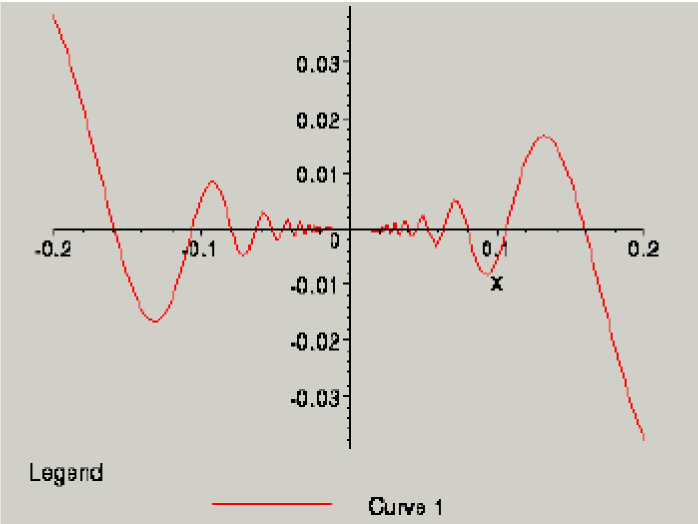


Figura 5: Representação da função da Figura 4 com intervalo menor (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 97)

Com o auxílio do *software*, os alunos utilizam o recurso "derivar" para calcular a derivada da função; mesma função abordada anteriormente. Também plotaram o gráfico dessa função derivada, buscando entender sobre o conceito de derivabilidade de f. Destes dois procedimentos de investigação utilizados pelos alunos, sem o auxílio do Maple, eles não seriam feitos, pois não representam procedimentos simples. (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 99).

Dessa forma, as conjecturas elaboradas e as investigações feitas nesse episódio tornaram-se diferenciadas pelos elementos envolvidos em cada caso. Como Olimpio Junior (2006) expõe, as compreensões são interferidas diante dos movimentos exploratórios, dos esclarecimentos e dos conflitos que passam a existir durante a interação com o Maple. Ao final dessa atividade, os alunos concluíram que, aplicando o limite na função e resultando em zero, a função é diferenciável. Além disso, o pesquisador ressalta que

> O(a) leitor(a) já deve ter notado que dificilmente eles teriam chegado à tais conclusões sem a participação do CAS, uma vez que a abordagem clássica à questão seria indireta, ou seja, por meio de um teorema (Se g é limitada e lim k = 0 num ponto *a* então lim g.k = 0 no mesmo ponto.), que, provavelmente, ainda não estaria participando da rede de significados que está sendo exercitada. (OLIMPIO JUNIOR, 2006, p. 103).

Outro *software* utilizado nas pesquisas desta área, e muito conhecido no trabalho com Geometria, está presente no trabalho de Jacyntho (2008). O pesquisador propõe atividades que permitam ao estudante refletir sobre conceitos implícitos nas definições e teoremas de CDI, por meio de aulas teóricas e com o *software* Geogebra[12]. Apresentando a versão utilizada para a construção das atividades correspondente ao Geogebra 3.0.0.0., de modo sucinto, ele descreveu algumas operações necessárias para a utilização do *software* (JACYNTHO, 2008).

É interessante ressaltar que a interface do Geogebra (Figura 6) apresenta-se por uma janela geométrica, uma janela algébrica e um campo de entrada para fórmulas e comandos algébricos. Nas atividades, Jacyntho (2008) apresenta os objetivos, um roteiro e os comentários referentes a cada uma delas e, quando necessário, faz referências a outros detalhes sobre as funções do *software*.

[12] Acesso e informações pelo site: www.geogebra.org

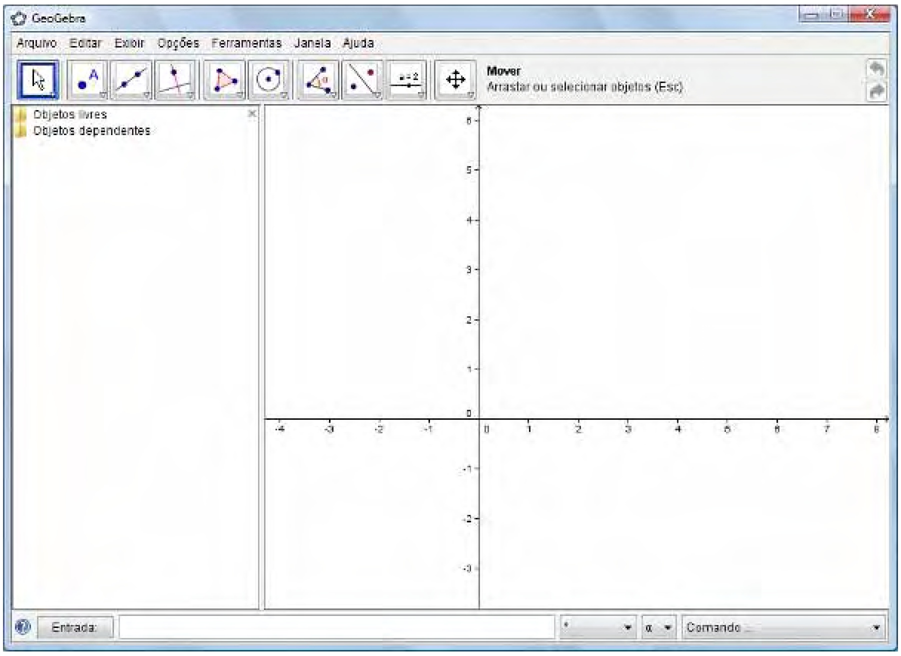


Figura 6: Tela do *software* Geogebra 3.0.0.0

Tratando das potencialidades do Geogebra para o ensino e aprendizagem em CDI, destacamos a Atividade 3 (Figura 7) desenvolvida no trabalho de Jacyntho (2008), a qual objetivou mostrar a noção intuitiva de que uma região curvilínea possui uma medida de área. Por meio do cálculo da soma de áreas de retângulos, o *software* permitiu explorar a noção visual dos retângulos formados para o cálculo da área da função. As noções aritméticas permitiram fazer comparações sobre o cálculo das áreas função, por meio da integral ou pela soma das áreas dos retângulos formados por aproximações da área real.

1. Calcular a área de uma região curva **S** limitada pelo eixo x, uma função **f** contínua, positiva e não constante e as retas $x = a$ e $x = b$, através da soma inferior e soma superior de áreas de retângulos;

2. Indicar que ao aumentar indefinidamente a quantidade inicial de retângulos para calcular a medida da área desta região, existe um limite superior para a soma das áreas inferiores e um limite inferior para a soma das áreas superiores, e que estes limites são iguais a medida da área da região **S**;

3. Concretizar a noção intuitiva de que uma região com lados curvos, possui uma medida de área.

Figura 7: Atividade 3 desenvolvida no trabalho de Jacyntho (2008)

O pesquisador aponta em seus comentários finais sobre a atividade, que ao propor o limite das somas no processo de cálculo de áreas, obtém-se um significado diferente do limite de uma função que aprendemos em CDI. (JACYNTHO, 2008). Porém, isso não significou dizer que apenas com o uso do *software* se consegue apresentar tal significado aos alunos, mas que a representação da função e dos retângulos, como também os cálculos das áreas apresentados momentaneamente no processo de aproximação das áreas, facilitam o processo de percepção das propriedades desejadas.

Assim como Jacyntho (2008), Scucuglia (2006) também se aproxima bastante do nosso trabalho. Como já mencionamos no capítulo anterior, o pesquisador buscou evidenciar como a investigação com Calculadoras Gráficas pode condicionar a (re)elaboração de conjecturas, argumentações e justificativas pelas estudantes envolvidas na atividade.

Buscando tecer conjecturas sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), com o objetivo de encontrar algumas demonstrações formais inerentes a esse teorema, o pesquisador elaborou um conjunto de atividades. Dentre elas destacamos a que traz a seguinte situação: *Os estudantes tinham o esboço da Região limitada pelo gráfico y= f(x) e pelo eixo-x o intervalo [a,b]*(Figura 8)

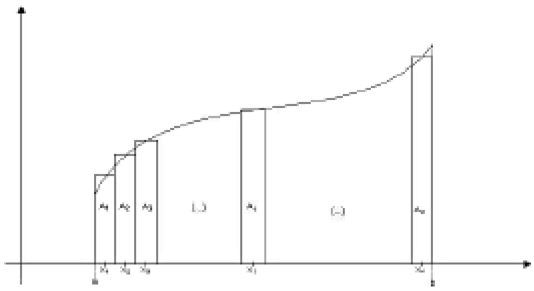


Figura 8: Atividade desenvolvida no trabalho de Scucuglia (2006, p.56)

Ao considerar o intervalo [a;b] dividido em "n" partes iguais, demarcados seus pontos médios e, dado um valor aproximado da base dos retângulos, Scucuglia (2006) solicitou aos alunos que calculassem o valor da área de cada retângulo, a soma entre essas áreas e o valor da área exata dessa região.

Uma das perguntas propostas na atividade, questionava se *"É coerente propor que o Programa AREA executa a soma* $A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i$*."* Os estudantes, fazendo uso da calculadora gráfica, aplicaram o Programa AREA e puderam investigar se a notação desse recurso representava realmente a soma das áreas. O *software*, então, ao permitir que os cálculos fossem feitos de modo breve - uma característica marcante dessa ferramenta – deveria facilitar um processo aritmético que os estudantes realizariam. Porém, o pesquisador buscou ressaltar entre eles se as TIC haviam realizado tal procedimento e se estava sendo feito da forma como os alunos necessitavam naquele momento. Com isso, esse trabalho de exploração da ferramenta possibilitou também que o pensamento em torno desse conteúdo fosse estudado com mais clareza.

Esse momento de interação entre os alunos e a Calculadora Gráfica, como foi descrito, possibilitou a articulação dos pensamentos algébrico, gráfico e numérico, para que se pudesse refletir sobre os elementos implícitos na execução do recurso presente na tecnologia. Assim, ao estudar essa potencialidade do meio computacional, os estudantes tiveram também que estudar quais os conceitos que estavam sendo utilizados por ele. Dessa maneira, era necessário apreender idéias intrínsecas ao gráfico, desenvolver equações e aplicar fórmulas e medidas referentes ao contexto da atividade.

Esse processo possibilitou entender a abordagem do conceito de Soma de Riemann, pois o estudo realizado pelos estudantes, em consonância com as TIC, permitiu estabelecer relações entre os procedimentos tecnológicos e manuais, mostrando-se dois modos de produzir conhecimento matemático.

Como o autor evidencia, há a utilização de recursos da Calculadora Gráfica, a valorização dos "aspectos visuais, a elaboração de conjecturas, a coordenação de diferentes representações e de informações sobre o tema explorado, pode condicionar a estruturação de uma abordagem experimental". (SCUCUGLIA, 2006, p. 54).

Como pudemos notar nos trabalhos apresentados anteriormente e como será visto nas atividades que desenvolvemos neste trabalho, a visualização consiste em um elemento de importância ao atrelar-se a outras formas de representação para constituição de conceitos em Matemática.

Esses modos de visualização, acrescidos pelos modos de simulação, como apresentaremos com base no trabalho de Menk (2005) mostraram-se satisfatórios nas aulas de CDI. A pesquisadora utilizou um *software* de geometria para explorar problemas de Máximos e Mínimos e disponibilizou para alunos o *software* Cabri-Géomètre II (Cabri) para construir hipóteses, como também experimentar, formular, testar, validar ou refutá-las, relacionadas a um dado problema.

A exposição de uma atividade aplicada pela pesquisadora nos permitiu apresentar as potencialidades desse *software*. O enunciado dessa atividade consistia em um problema que propunha: *"Rodney tem 100m de grade com os quais pretende construir um cercado retangular para seu pequeno poodle francês. Quais as dimensões do cercado retangular de área máxima?"* (MENK, 2005, p. 76). Os alunos, então, foram orientados a construir a figura no Cabri para encontrar as dimensões requisitadas, através da análise do gráfico (MENK, 2005).

O Cabri, como foi relatado pelos alunos e pela pesquisadora, permitiu visualizar o processo de movimentação da figura e, também consentiu outra forma de entendimento da derivada utilizando-a em situações diversas (MENK, 2005). Como foi destacado por Menk (2005), um dos principais diferenciais da inserção do *software* nesse trabalho foi a possibilidade de obtenção do gráfico e/ou da tabela a partir do movimento da figura. Esse fato também permitiu aos alunos mudar o modo de ver o problema apenas por meio do papel e poder analisar uma mesma situação de maneiras diferentes.

Assim como esses trabalhos apresentados, nossa pesquisa também vem apresentar atividades que permitem conhecer ferramentas tecnológicas inseridas na Educação e novas formas de conceber os conceitos de CDI.

Porém, não prosseguiremos, nesse momento, com a abordagem das atividades desenvolvidas no nosso projeto. Consideramos fundamental, inicialmente, fazer uma breve apresentação da ferramenta computacional envolvida em nossa pesquisa. Como ainda não encontramos trabalhos na literatura que mostrem a abordagem de conceitos de CDI com o *software* K3DSurf em pesquisas de Educação Matemática, consideramos indispensável uma apresentação mais elaborada desse *software,* o que constitui no próximo tópico desta pesquisa.

2.2.2. Apresentação do *software* K3DSurf no ensino de Cálculo Diferencial e Integral

O *software* K3DSurf[13] é uma ferramenta que auxilia o desenvolvimento de atividades na disciplina de CDI, assim como os *softwares* Winplot, Geogebra, Maple e Cabri-Geomètre e a Calculadora Gráfica. Foi desenvolvido[14] a partir de uma ferramenta computacional que permite a visualização e manipulação de superfícies bidimensionais e uma representação de superfícies de no máximo três dimensões. As superfícies com dimensões maiores de três são representadas apenas por meio de equações matemáticas.

Essa tecnologia computacional apresenta um ambiente propício para visualização e manipulação de modelos matemáticos em três dimensões (3D), quatro dimensões (4D), cinco dimensões (5D) e seis dimensões (6D) e também permite rotacionar, transformar (morfar) e

[13] O arquivo disponível para fazer o *download* do *software* K3DSurf na versão livre e algumas informações complementares, encontra-se nos endereços eletrônicos <http://k3dsurf.sourceforge.net/> ou <http://superdownloads.uol.com.br/download/93/k3dsurf-windows/>.
[14] Seu criador foi Abderrahman Taha.

escalonar esses objetos. Esses recursos possibilitam a exploração das representações das funções matemáticas no espaço no qual tal função pode ser inserida no *software* na forma F(x,y,z,...) = 0 ou da forma de funções paramétricas.

Apesar de consistir em um *software* com potencialidades bem desenvolvidas, quanto ao trabalho de visualização de funções matemáticas, em nossos estudos, porém, não encontramos uma utilização do K3DSurf difundida no contexto do ensino e aprendizagem de Matemática como os demais *softwares* citados.

Dessa maneira, optamos por apresentar algumas possibilidades de manuseio do *software* nessa pesquisa. Também trazemos um pequeno manual (Apêndice I) com informações sobre o K3DSurf, que foi desenvolvido para anteceder a aplicação das Atividades Exploratório-Investigativas com os alunos participantes da pesquisa, e permitir-lhes, conhecer o *software* e os conceitos matemáticos de geometria que se mostram de fundamental importância nos estudos de CDI.

O primeiro contato com o *software* podia ocasionar dúvidas quanto à manipulação das ferramentas disponíveis, pois encontra-se na versão de língua inglesa, e os nossos alunos poderiam não dominar esta língua estangeira. Entretanto, o usuário poderia familiarizar-se sem grandes dificuldades com o K3DSurf, e perceber que o manuseio é simples.

A Figura 9 representa a tela inicial do K3DSurf, que já se inicia representando a função matemática F(x,y,z) = cos(x) + cos (y) + cos (z).

Para que o usuário inserisse a função, ele deveria colocá-la no "*Campo 1*" da Figura 10 e selecionar o botão "*compute*". No exemplo que apresentamos a seguir, inserimos a função F(x,y,z) = sen(x) - y, com x, y e z pertencendo ao conjuntos dos números reais.

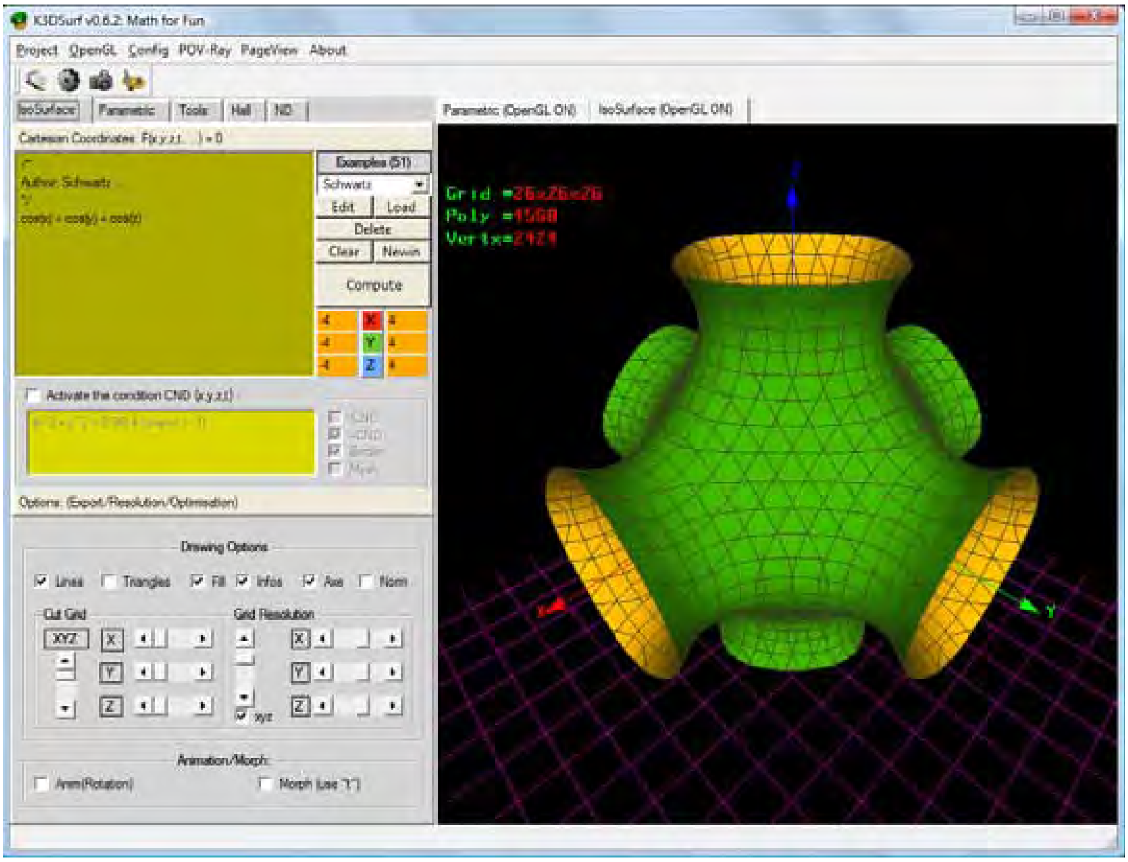


Figura 9: Tela do *software* K3DSurf

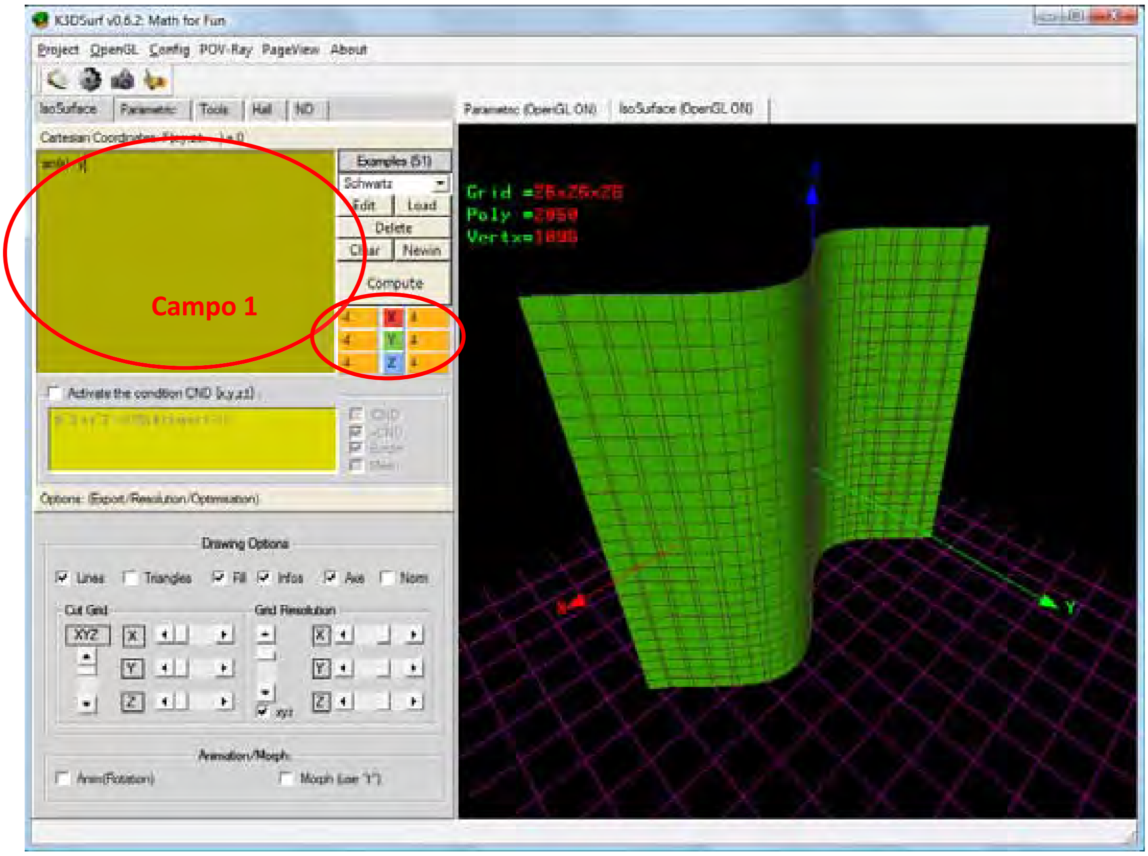


Figura 10: Componentes da aba "IsoSurface" do *software* K3DSurf

O campo que representa graficamente a função permite ao usuário fazer rotações no sentido desejado, apenas colocando o cursor sobre a tela, clicando no botão esquerdo do *mouse* e arrastando-o para uma direção escolhida. A representação também pode ser visualizada de maneira mais próxima ou mais distante, colocando o cursor sobre a tela, clicando no botão direito do *mouse* e arrastando-o para uma direção escolhida. O *software*, portanto, permite conceber diversos pontos de vista e aproximação sobre uma mesma função. Nas Figuras de 11 a 14, apresentamos algumas dessas possibilidades de visualização.

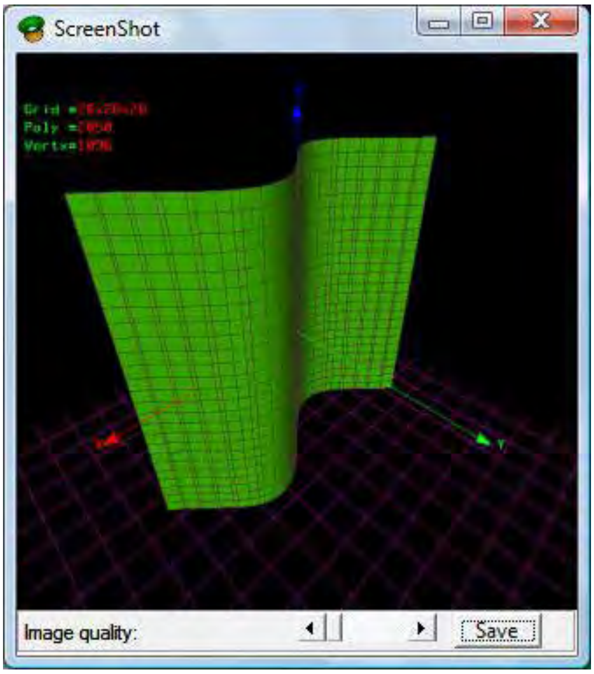


Figura 11: Visualização dos eixos x, y e z

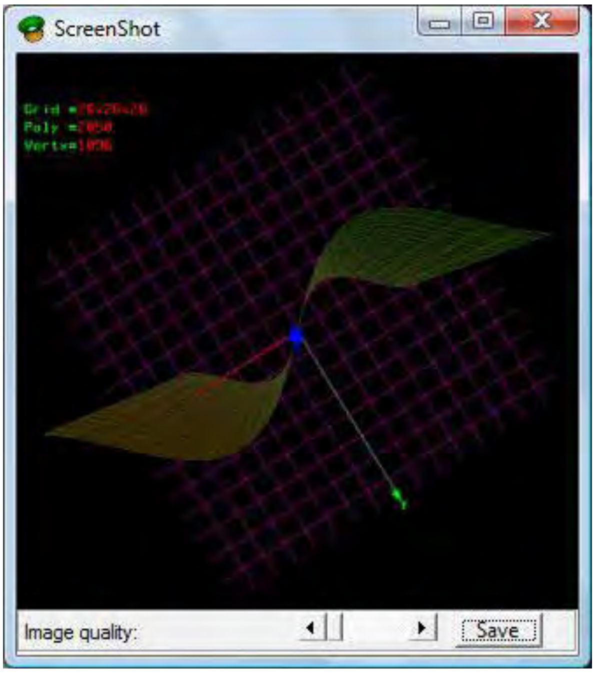


Figura 12: Eixo z perpendicular a perspectiva de visão

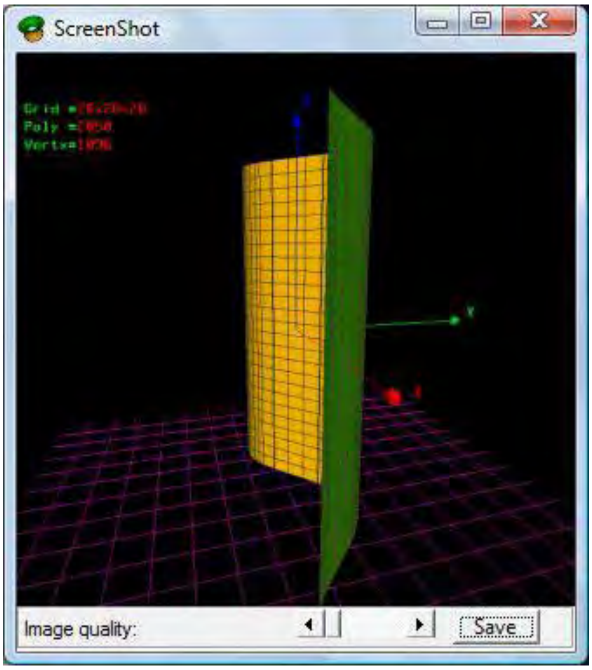


Figura 13: Outro perpectiva de visão

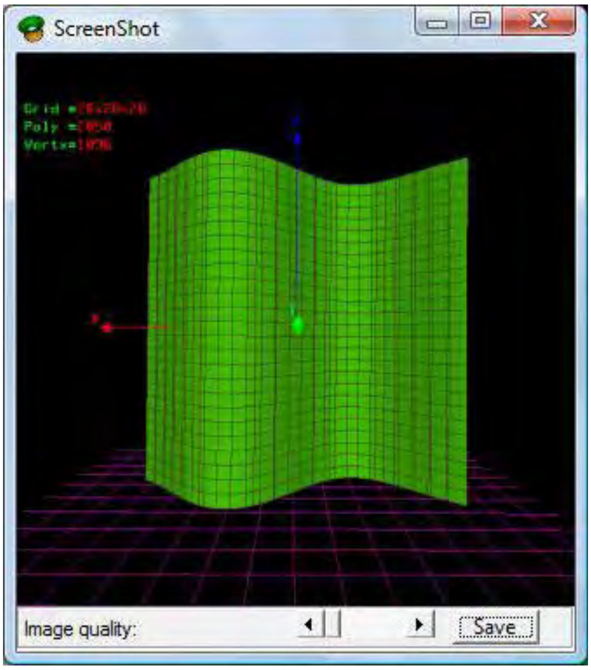


Figura 14: Eixo y perpendicular a perspectiva de visão

Ressaltamos o fato do K3DSurf conceber a representação das funções sob uma Perspectiva Cônica. A projeção dos objetos sob essa perspectiva consiste em uma técnica que procura nas imagens, um realismo ótico, na medida em que diminui o tamanho da imagem projetada elas se encontram mais afastadas. (RAPOSO, 1999 apud GOUVEIA, 2007). Essa técnica de representação permite que o usuário tenha uma maior clareza na visualização das funções e faça associações mais adequadas com objetos reais. Todavia, deve-se tomar o cuidado ao abordar esse tipo de representação em uma sala de aula pois ao representar um objeto no *software*, tem-se “as **aparências** de suas **formas** e as **dimensões modificadas** em relação à figura real (construída)” (MISKULIN, 1999, p. 316).

O K3DSurf, como pudemos apreender, possui outras ferramentas que auxiliam na visualização da função. Os botões do campo “*Drawing Options*”, destacados na Figura 15, permitem que: delimitemos a variação de valores de representação da função nos eixos x, y e z (Figura 16); optemos para a quantidade de pontos plotados no gráfico (Figura 17) e escolhamos quais os elementos estarão presentes na representação do gráfico, tais como eixo, gráfico, linhas no gráfico, entre outros (Figura 18);

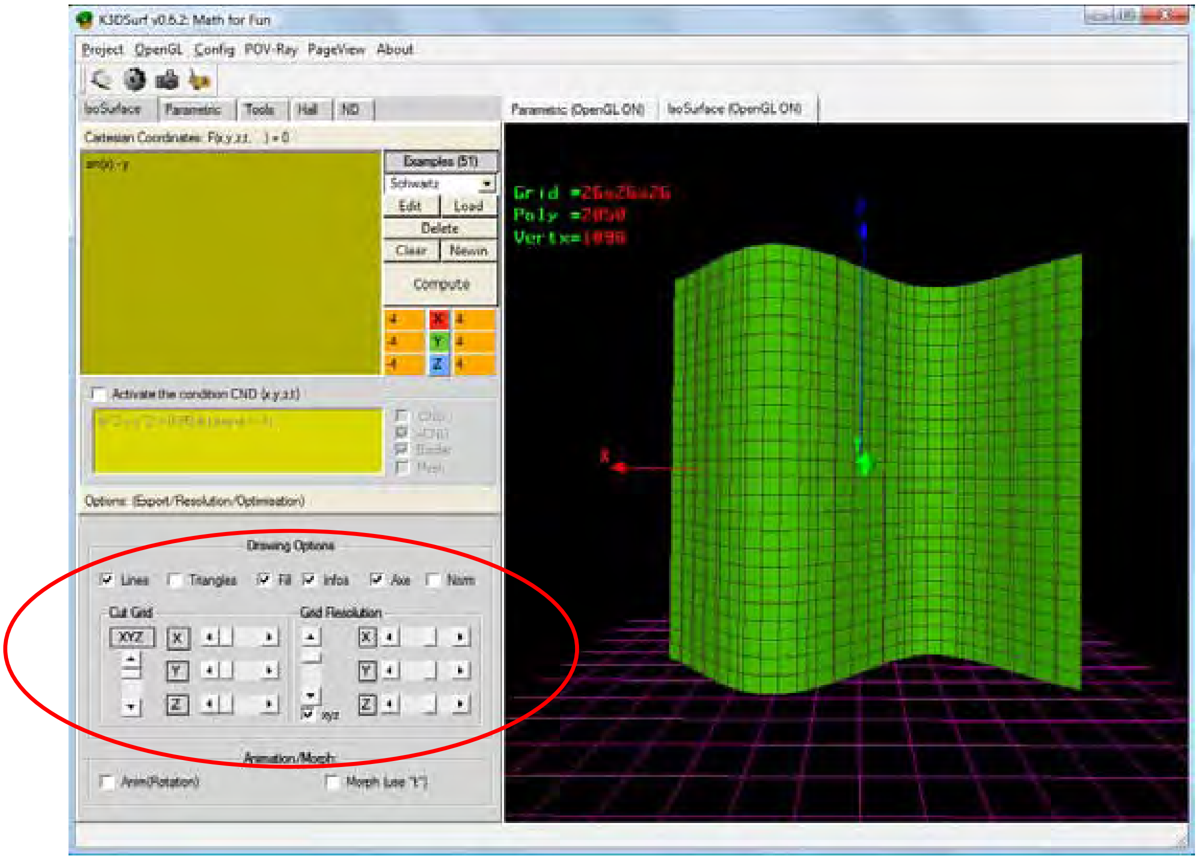


Figura 15: Botões do campo “Drawing Options”

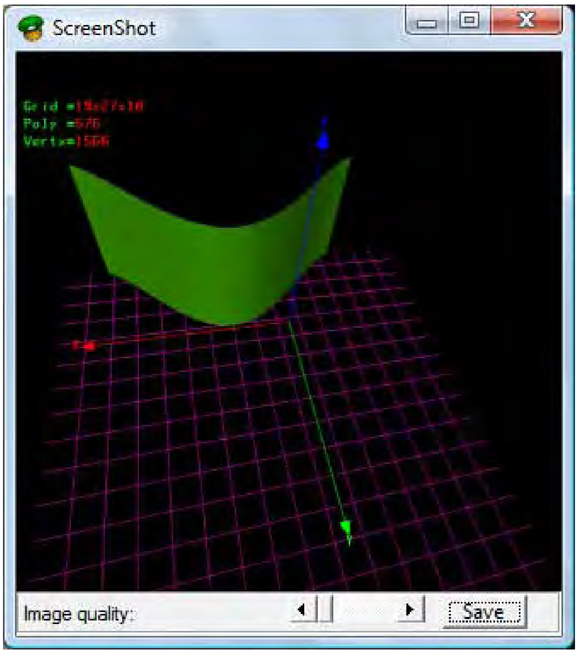


Figura 16: Representação da função nos eixos x, y e z

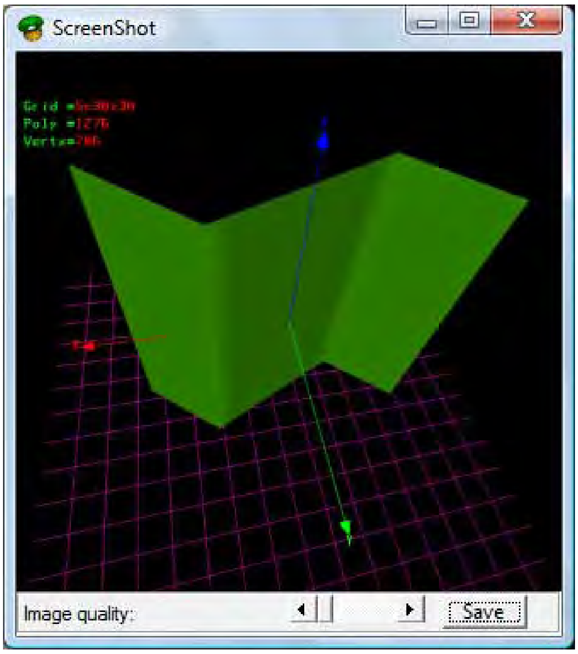


Figura 17: Pontos plotados no gráfico

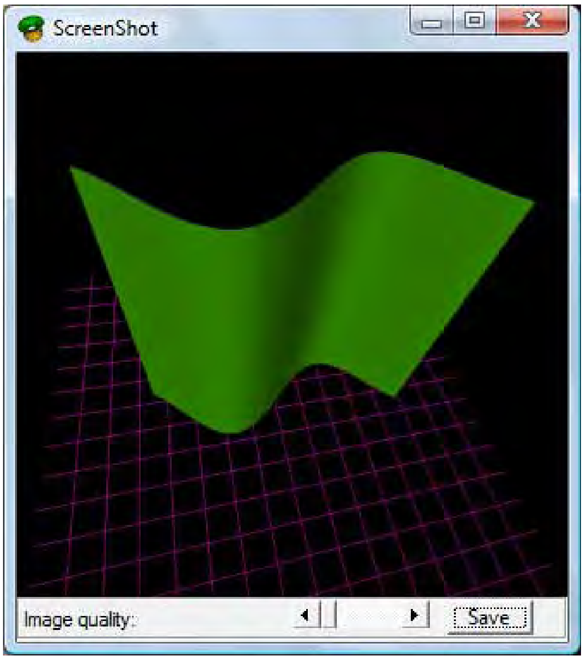


Figura 18: Elementos presentes na representação do gráfico

Os principais botões de movimentação do *software* são os do campo "*Animation/Morf*". A ferramenta "*Anim*" permite uma movimentação dos eixos x, y e z, e, portanto, a movimentação da figura representada de forma independente do comando de movimentação dada pelo usuário ao arrastar o mouse, como explicamos anteriormente.

O recurso "*Morf*" possibilita ao usuário a utilização de uma variável t na função e dar-lhes diferentes valores. No exemplo dado, utilizando a função F(x,y,z) = sen (x) – y, poderíamos acrescentar o *t* na função, como F(x,y,z) = sen (x) – y + *t*, delimitando os valores de *t* (por exemplo, 0 < *t* < 10 no campo "*Activate the condition*"). Clicando no botão "*Compute*" o gráfico da função se movimentaria ao percorrer valores de *t*.

Contudo, não poderíamos apresentar as potencialidades desses botões por trazermos informações estáticas para a apresentação desse trabalho. A Figura 19 a seguir, indica o local em que são acessados esses dois recursos apresentados.

Algumas das funções presentes no K3DSurf, apresentadas neste tópico, consiste na presença de um campo que permite a inserção de funções matemáticas paramétricas. Na Figura 20, o usuário pode escolher, entre os dois campos destacados, em qual desses inserirá as funções matemáticas.

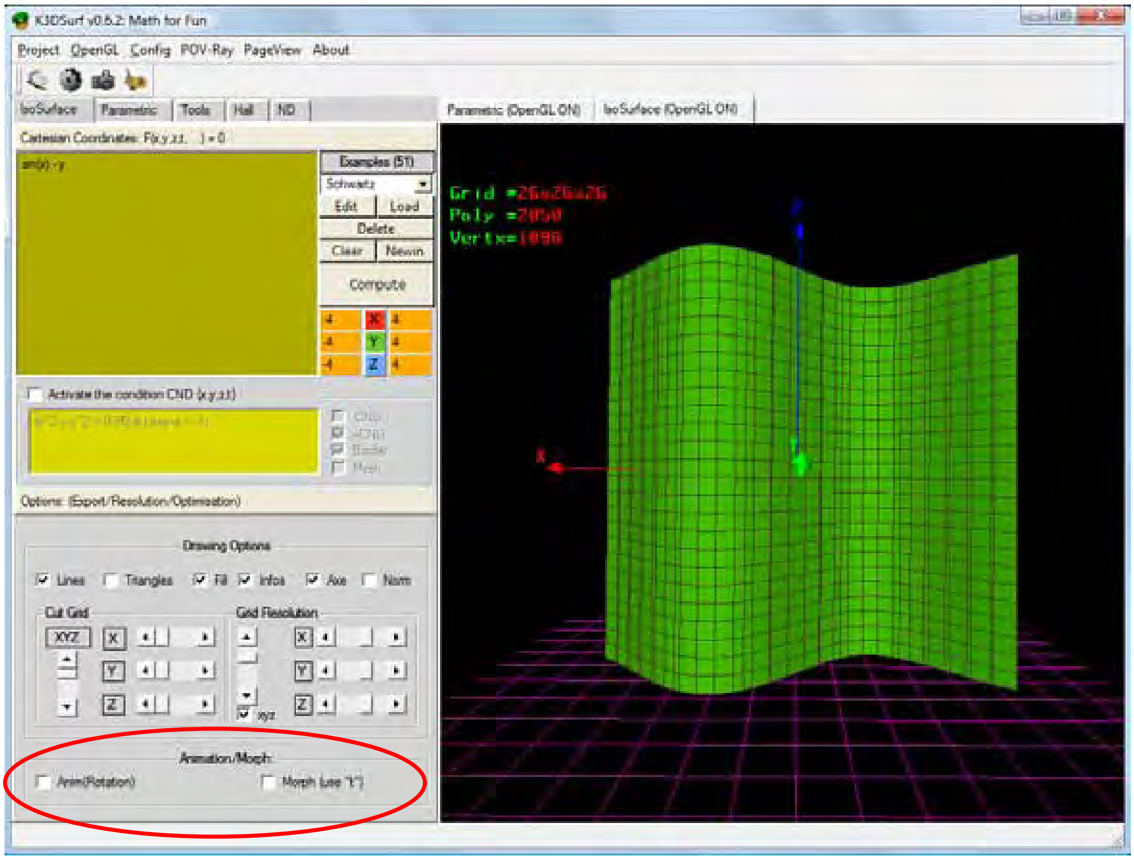


Figura 19: Botões de movimentação “Animation/Morf”

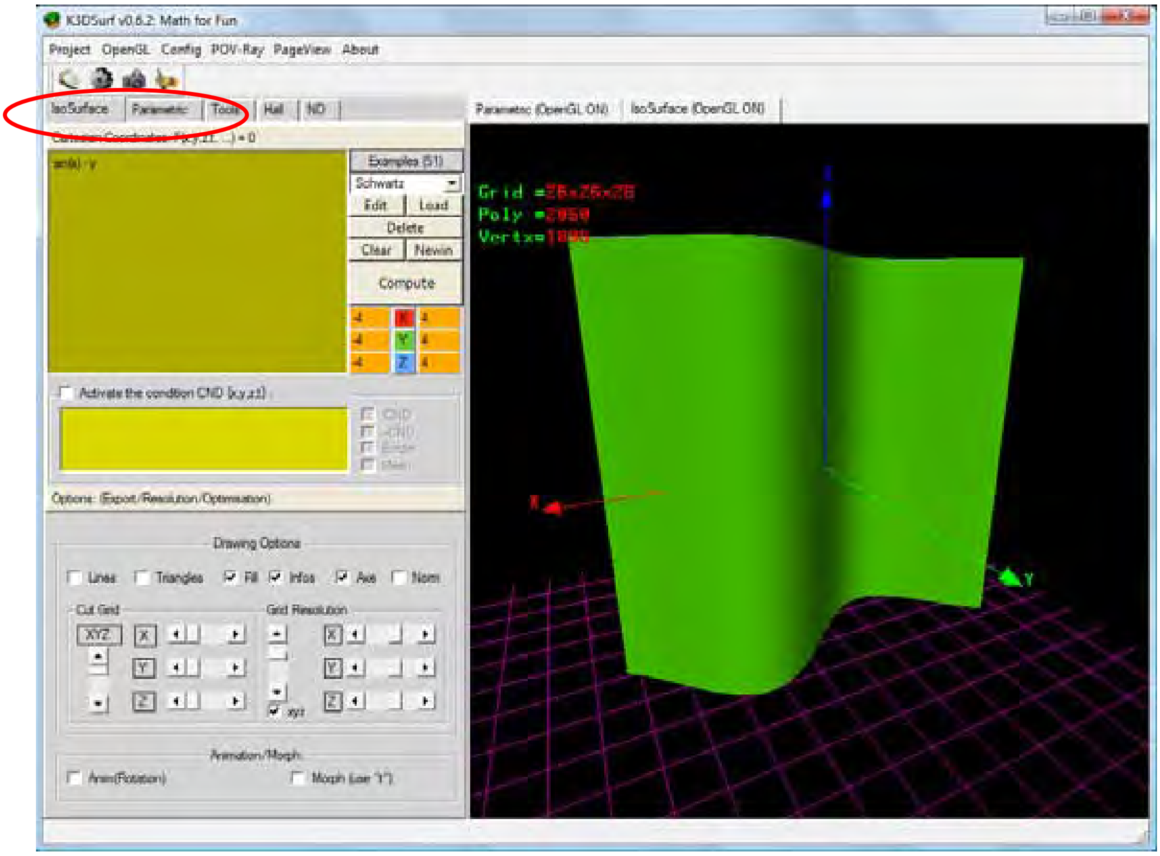


Figura 20: Campos de trabalho com Função Explícita ou Função Paramétrica

Assim, considerando as possibilidades trazidas pelo *software*, procuramos apresentar essa tecnologia aplicada ao ensino e aprendizagem de Matemática. De forma mais específica, procuramos inserir a utilização do referido *software* nas atividades em CDI com o qual os alunos possaram explorar e apreender os conceitos de integral, derivada, limite, entre outros.

No próximo capítulo abordaremos aspectos inerentes aos processos de visualização e representação implícitos na construção do conhecimento matemático pelos indivíduos. Abordaremos como esses elementos podem estar presentes no contato dos alunos participantes desta pesquisa com as TIC e também com outros materiais, os quais consideramos como formas de permitir aos indivíduos apreender os conceitos algébricos por meio de elementos geométricos.

3. REPRESENTAR E VISUALIZAR

Propomos neste capítulo apresentar, inicialmente, nosso modo de compreender e considerar o sentido dos termos Representar e Visualizar, de modo a elucidá-los ao leitor. Em seguida, relataremos as influências e a presença dos processos de visualização e representação no contexto da Matemática e da Educação Matemática, apresentando-os no ensino e aprendizagem do conteúdo matemático. Apontamos também, alguns aspectos sobre a teoria que suporta e auxilia a compreensão dos processos de visualização e de representação.

Por fim abordaremos alguns pontos sobre teoria da Semiótica na perspectiva Peirceana, que se apresenta como base teórica dessa Dissertação de Mestrado, no contexto da Educação Matemática. Essa teoria conduzirá as análises dos dados constituídos pelas observações feitas pela pesquisadora nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) I, nas Entrevistas com alguns alunos que se disponibilizaram a participar da pesquisa, bem como as Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas por eles.

O processo de representação e visualização que buscamos compreender na investigação requer da pesquisadora uma apreensão legítima dos conceitos que permeiam os termos *visualizar* e *representar*. Eles serão referidos constantemente nesse estudo e, portanto, consideramos que também devem ser esclarecidos para o leitor.

Nesse primeiro processo buscamos elucidar nosso modo de *ver* esses termos. Consideramos que, dessa forma, poderemos tecer interpretações acerca dos processos envolvidos no desenvolvimento da pesquisa. Ressaltamos que implícito a essas descrições, existe uma importância do *olhar* de cada um, dos conceitos que cada pessoa traz consigo e a das diversas *interpretações* que podem ser feitas diante de palavras, gestos, objetos, ou qualquer outra forma de comunicação. Desse modo, procuramos sempre esclarecer o significado de cada palavra, procurando aproximar o nosso modo de “ver” ao modo de “ver” do outro.

O objetivo de estender os diversos conceitos relacionados ao *visualizar* e ao *representar*, está pautado na nossa visão de que poderíamos, assim, alcançar uma compreensão mais clara e completa dessas expressões, elucidando melhor esses processos na interação com os sujeitos que comporão a nossa pesquisa. Dessa forma, procuramos apresentar os conceitos encontrados nos dicionários de Língua Portuguesa e de Filosofia.

A forma como o Dicionário Priberam (2009)[15] faz o registro do verbo *Representar*, é:

> v. tr. *1.* Patentear, revelar, mostrar. 2. Reproduzir pela pintura, escultura, gravura, etc. 3. Trazer à memória, significar, simbolizar. 4. Expor (por meio de representação). 5. Ser mandatário, procurador, embaixador ou agente de. 6. Fazer as vezes de. 7. Figurar, parecer ter. 8. Pôr em cena. 9. Ter na peça um papel. v. intr. 10. Dirigir uma representação a. 11. Fazer um papel. v. pron. 12. Figurar-se. (DICIONÁRIO PRIBERAM, 2009, grifo nosso)

A variação do verbo, concebido pelo substantivo *Representativo,* encontra-se em Abbagnano (1998), como:

> (in. Representative, fr. Re-présentatif, ai. Vorstellend; it. Rappresentativó). 1. O sentido deste adjetivo é mais limitado que o do substantivo correspondente, uma vez que contém referência ao caráter de "semelhança" ou "quadro", excluído por alguns dos significados do substantivo. Assim, "idéia R." é a idéia que se concebe como imagem ou reprodução de seu objeto. Diz-se que o conhecimento tem natureza R. quando se acha que ele constitui imagem ou cópia do objeto. 2. Emerson chamou de homens R. aqueles que Hegel chamava de "indivíduos da história universal" ou outros românticos chamavam de "heróis": homens que são símbolos e, ao mesmo tempo, instrumentos de realização das aspirações de todos os homens {Representative Men, 1850). 3. No sentido político, sistema R. é o sistema que se baseia no princípio de delegação de certos poderes políticos a alguns cidadãos, feita por uma parte dos cidadãos. (ABBAGNANO, 1998, p. 870, grifo nosso).

O conhecimento que trazíamos para essa pesquisa, compreendendo que o *Representar* consistia em *reproduzir algo*, *ou expor alg*o, não sobressai aos significados de *revelar* e *mostrar* que estão registrados no Dicionário Priberam. É principalmente por meio dessa conceituação que buscamos compreender os conceitos de Cálculo, através das representações feitas pelos alunos investigadas durante as Atividades Exploratório-Investigativas.

Buscamos também apresentar o conceito do termo *Representativo*, o qual é concebido como uma *imagem ou reprodução de um objeto.* Dessa forma, entendemos que quando algo se *revela* e se *mostra,* se faz como uma *reprodução* diferente para cada um, e para nós, é o

[15] Disponível em: <http://www.priberam.pt/DLPO/default.aspx?pal=representar>. Acesso em: 17 out. 2009.

que vem constituir o processo de *Representar* vinculado ao processo de *Visualizar* explicitado em seguida.

Retomando o Dicionário Priberam, temos que o verbo *Visualizar* possui os significados de

> v. tr. Tornar visual. e de f. 1. Ato ou efeito de visualizar. *2.* Colocação em evidência de uma maneira material, da ação e dos efeitos de um fenômeno. 3. Inform. Apresentação no ecrã, sob forma gráfica ou alfanumérica, dos resultados de um tratamento de informações. (DICIONÁRIO PRIBERAM, 2009, grifo nosso)

Esse conceito para nós se constitui pelo *o quê* e *como* o sujeito *vê* um objeto. Após o contato que obtivemos desse termo no referido dicionário, que permitiu uma nova interpretação do mesmo conceito, apresentamos um cuidado significativo sobre os aspectos que o consideram como uma *colocação em evidência de uma maneira material, da ação e dos efeitos de um fenômeno*. Ou seja, o modo como um indivíduo percebe um objeto, realiza associações, bem como, faz interpretações e atribui propriedades, será peculiar para cada um. As características que sobressaem diante de um processo de *representação*, poderão causar um processo de *visualização* diferente em cada indivíduo, dado o conjunto de experiências com objetos que ele já teve contato e já experenciou em sua vida.

Acreditamos, então, que podemos apreender um pouco da compreensão dos conceitos matemáticos advindos das experiências dos alunos, quanto à forma pela qual eles são orientados pelos artifícios da *representação* e da *visualização*, mesmo que feito de uma maneira implícita por eles.

3.1. COMO A MATEMÁTICA TRABALHA O VISUALIZAR E O REPRESENTAR

Percebemos o desenvolvimento dos processos de visualização e de representação como um campo abrangente nas diversas áreas do conhecimento. Assim, além de buscar definir como entendemos esses dois conceitos, vamos prosseguir a apresentação deste Capítulo delimitando nossos estudos ao campo da Educação Matemática. Isto significa: estudar como alguns matemáticos, educadores matemáticos e pesquisadores desta área utilizam os processos de visualizar e os de representar sob diferentes perspectivas.

Flores (2003) constata, a partir do trabalho de Lefebvre (2001 apud FLORES 2003, p. 23) que, estes processos, ao serem realizados por um matemático, traduz-se em imagens gráficas que “são tomadas, por eles, às vezes como fontes secundárias, em outras, essenciais para a produção e a difusão dos conhecimentos matemáticos”. Ou seja, os processos de visualização e de representação, mesmo presentes nos dois procedimentos, podem ter sua aplicação ou seu grau de relevância no desenvolvimento do trabalho diferenciado por cada indivíduo.

Da utilização das imagens gráficas pelos matemáticos, como também por qualquer indivíduo que trabalhe com conteúdos matemáticos, o que procuramos ressaltar, neste momento, são os recursos/elementos/artefatos empregados nos experimentos de ensino e aprendizagem do conteúdo. Buscamos formas de compreender como cada elemento pode influenciar o contexto de aprendizagem em Matemática, ou seja, abordar o modo como são utilizados os recursos que permeiam os processos de visualização e representação, dado por um indivíduo qualquer em procedimentos matemáticos diversos.

No caso de nossas experiências como estudante, pesquisador e professor, quando almejamos representar e visualizar algum objeto, na maioria das vezes optamos pela fala e pelos gestos e, em seguida, por um esboço no papel ou no quadro-negro.

Assim, apesar de conhecermos de antemão outros artifícios, tais como objetos destinados à manipulação e os artifícios tecnológicos, na maioria das vezes, eles não são aproveitados nesses processos. Como Fiscarelli (2006, p. 5) expõe, existe um sentimento de despreparo pelos professores, além de outros aspectos dificultadores dessa utilização, "relacionados a fatores internos e externos ao ambiente escolar, os quais influenciam no efetivo uso de alguns materiais didáticos."

Além desta ressalva nos recursos que podem ser utilizados durante o processo de visualização e de representação, devemos explorar também, a freqüência no uso desses recursos. Temos conhecimento de que há uma alteração e uma limitação no desenvolvimento dos indivíduos quanto a sua capacidade de

> [...] reconhecer figuras planas, identificar uma determinada figura em diferentes posições, visualizar transformações e movimentos de uma imagem mental, relacionar um objeto com sua representação gráfica, relacionar as semelhanças e diferenças entre objetos e suas representações. No decorrer dessas atividades, o aluno, ao recorrer à visualização, executa diferentes processos mentais, gerando outras imagens, que poderão orientá-lo na representação do objeto e assim, sucessivamente. (GARCIA, 2007, p. 48).

Será que podemos considerar que a "quantidade" e a "qualidade" de experiências que um indivíduo tem com diversos objetos são capazes de auxiliar o desenvolvimento dos processos de representação e visualização? Como podemos perceber, existe uma "quantia" do que o aluno consegue *tornar visual* de um objeto, como também um certo grau de desenvolvimento dos conceitos e propriedades que podem ser extraídos desse objeto, sendo distinto para cada indivíduo.

Assim, em nossa pesquisa, procuramos mostrar que a capacidade de interpretação e desenvolvimento de conceitos por meio da visualização e da representação não ocorrem de uma mesma maneira nos indivíduos. O que pode parecer simples e de fácil entendimento por alguns indivíduos, pode não ser para outros, sendo então, uma ocorrência variável. Atrelamos a esses aspectos, os recursos que podem ser disponibilizados e a recorrência pela qual isso é feito, por meio da explanação de vários autores.

Assim, encontramos em Miskulin (1999) uma abordagem no que diz respeito a alguns aspectos teóricos, referentes a esse assunto que nos referimos neste momento. Entre eles, são indicados Piaget e Inhelder (1993 apud MISKULIN, 1999), Fischbein (1993 apud MISKULIN, 1999), Gutiérrez (1996 apud MISKULIN, 1999), Pais (1994 apud MISKULIN, 1999). Para nós, cabe ressaltar um pouco dessas formas de pensar tal como foi feito pela pesquisadora.

Na obra de Piaget e Inhelder (1993 apud MISKULIN, 1999, p. 290) intitulada "Representação do Espaço na Criança", esses autores citam que "a representação espacial é uma ação interiorizada e não simplesmente a imaginação de um dado exterior qualquer, resultado de uma ação". Essa ação, portanto, é refletida durante todo o processo realizado, e se constituí em processos cognitivos que passam pelo campo das *Abstrações Refletidas*.

Esse campo de análise dos processos cognitivos, também é tratado no trabalho de Fischbein (1993 apud MISKULIN, 1999), o qual traz em questão as propriedades *conceituais* e *figurais* das figuras geométricas. Miskulin (1999, p. 290) apresenta discussões do autor, quanto à *idealidade*, ou seja, apresentando que "a perfeição absoluta de uma esfera geométrica não pode ser encontrada na realidade", e sobre as propriedades do objeto presentes apenas na imagem.

Para nós, essas discussões compreendem as explorações que faremos neste trabalho. Nas representações das obras de arte que retratam objetos geométricos, na maioria das vezes de forma imperfeita ocasionada pelo desenho à mão livre, discutiremos a questão da *idealidade* que é explorada por Fischbein (1993). Um foco também será dado com base nesse autor, sobre a percepção das propriedades presentes nas imagens, as quais ultrapassam as propriedades apresentadas pelos conceitos. Buscamos trazer para a discussão, as formas pelas quais as representações influenciam o aprendizado em CDI I.

Retomando o trabalho de Miskulin (1999) vemos em Gutiérrez (1996 apud MISKULIN, 1999) mais uma visão sobre a visualização como atividade de raciocínio na abordagem de objetos tridimensionais. Esse autor indica a possibilidade de uma teoria que sustente os pressupostos da visualização nesses estudos, tais como fazemos nesta pesquisa. O autor também se refere a elementos desse campo de pesquisa, os quais são abordados por diversos autores com nomes diferenciados, mas que possuem significados semelhantes.

Entretanto, o que ressaltamos no trabalho do autor, refere-se aos elementos classificados para justificar as atividades de visualização. Assim, para Gutiérrez (1996 apud MISKULIN, 1999) as imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização integradas são campos que, associados, justificam a visualização em Geometria e, acrescentamos, em CDI I. Uma classificação, com base nesses elementos, advinda dos dados constituídos em nossos procedimentos metodológicos, permite entender o desenvolvimento do aluno participante de nossa pesquisa.

Pais (1994 apud MISKULIN, 1999) é outro autor que trabalha nesse procedimento de desenvolvimento do processo de visualização e representação do aluno. Ele cita que os elementos: *o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito*, interferem na aprendizagem da Geometria no que concerne ao processo de representação plana no espaço. Em seu trabalho, ressalta o objeto e o desenho como elementos manipulativos, de aspectos experimentais, o que se torna um conceito de entendimento mais simples para os alunos. A imagem mental e o conceito se referem a elementos mais abstratos, sendo a imagem mental constituinte de "um dos elementos fundamentais no processo de representação de objetos no espaço" (p. 292).

Desta forma, Miskulin (1999) apresenta algumas questões quanto aos aspectos teóricos que podem embasar estudos nessa área com a qual trabalhamos, e nos permite ter uma visão geral de como alguns autores percebem o visualizar no processo de ensino e aprendizagem.

Nos dados constituídos em nossa pesquisa, temos diversos exemplos que podem ser compreendido por meio desses autores trazidos no trabalho de Miskulin (1999). Um desses episódios aconteceu por meio do relato de uma aluna ao refletir sobre a dificuldade em esboçar e visualizar o gráfico da função. Para essa aluna, o *software* utilizado para as Atividades Exploratório-Investigativas dadas pela pesquisadora, devido a capacidade de rotação do objeto tridimensional (a função) em um ambiente bidimensional (a tela do computador), lhe permitiu entender como se apresentava o gráfico de uma função, como poderá ser melhor explicitado no Capítulo de Análise desta pesquisa.

Nas palavras da aluna, percebemos como o *software*, inicialmente, ajudou em algum momento o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas. "Eu não consigo fazer gráfico, sabe? Eu não enxergo o que vai dar, esse programa aqui é bom pra ver..."[16] Essa fala representou mais um argumento que justifica esse estudo. A proposta de um novo elemento fez a aluna relatar que algo havia mudado para ela, e com isso, procuramos compreender de que maneira o computador, por meio da visualização, influenciou a aprendizagem do conteúdo matemático.

Para Garcia (2007), embasada na maioria dos autores trazidos do trabalho de Miskulin (1999), o processo citado pela aluna pode desenvolver o ensino e a aprendizagem em Geometria. Nossa busca, entretanto, extrapola os conteúdos nessa área específica, procurando pensar nesse processo em outras áreas da Matemática, como o Cálculo, conteúdo com o qual as participantes da pesquisa estavam trabalhando.

Assim, compreender os conceitos de CDI I por meio da representação e visualização será um processo constante neste trabalho, que procura vincular os recursos dos materiais manipulativos, o *software* tridimensional e as obras de artes aos demais materiais já utilizados pelos alunos, tais como livros didáticos, aulas ministradas pela professora do curso de Cálculo e o caderno no qual eles estudam e cumprem as atividades da referida disciplina. Essa forma de desenvolver as Atividades Exploratório-Investigativas busca permitir várias maneiras de conceber um mesmo objeto, dado que um aluno pode compreender o processo por meio de uma ferramenta ou do trabalho em conjunto, feita pelo conjunto de ferramentas.

Gutiérrez (1996 apud GARCIA, 2007, p. 46) explicita que a visualização desenvolve "elementos visuais e espaciais necessários para resolução de problemas e provas de suas propriedades". Apesar de esse autor limitar o uso desse artifício à Geometria e divulgar sua importância no processo de ensino e aprendizagem desse campo da Matemática, para nós, o estudo feito por ele, vai além, e também se estende ao ensino e aprendizagem em CDI I.

O pronunciamento de Hitt (2003 apud FARIAS, 2007, p. 60), sobre os processos de visualização, apresenta formas de possíveis explorações no ensino e aprendizagem em CDI, sendo para o autor "difícil imaginar um curso com êxito de Cálculo que não enfatiza os elementos visuais do tema." Para o autor (HITT, 2003 apud FARIAS, 2007) é essencial esse artifício no desenvolvimento dos conceitos em CDI, mas que apesar disso, tem se perdido em meio à manipulação algébrica, que é enfatizada na maioria dos cursos de CDI.

Os processos de visualização na construção dos conceitos de CDI, com ênfase nos aspectos visuais, relevam os processos de visualização na elaboração de conjecturas e no processo de aprendizagem de conceitos presentes na disciplina. (VILLARREAL, 1999).

[16] Comentário feito pela Aluna G durante a Atividade 3, dados da presente pesquisa.

Assim, acreditando nas potencialidades dos processos de visualização e representação na aprendizagem dos conteúdos de CDI I, apresentados e justificados nas pesquisas como as de Farias (2007) e Villarreal (1999), buscaremos compreender as dimensões implícitas a esses processos, ou seja, buscar entender as diferentes configurações com as quais os alunos se relacionam e com o representar e o visualizar na apreensão do conteúdo em CDI I.

3.2. O VISUALIZAR NAS REPRESENTAÇÕES DE OBRAS ARTÍSTICAS

Na extensão deste trabalho, o presente tópico busca esclarecer algumas questões quanto ao modo de representar e de visualizar as obras de arte. Apesar de esse assunto estar presente, principalmente, nos trabalhos de Artes e Matemática associados à Geometria, consideramos importante discutir essas questões quanto aos aspectos do CDI. Avaliamos essa proposta como um elemento importante no ensino e na aprendizagem em CDI I ao utilizar as representações artísticas.

Ao realizarmos o processo de vinculação da Matemática com as Artes, lidamos, primeiramente, com algumas divergências quanto aos aspectos da representação e da visualização presentes na Matemática. A representação nas obras artísticas, como cabe ressaltar, não se preocupa sempre com as formas "perfeitas" de representação, que buscam retratar a realidade tal como podemos percebê-la com o olhar. Assim, encontramos diferentes modos de representar um objeto, uma pessoa, um animal ou um ambiente nas pinturas, nos desenhos, nas esculturas, entre outros meios de representações artísticas. Porém, neste trabalho, buscamos imagens semelhantes às suas configurações na realidade.

Hildebrand (2001, p. 22) teceu algumas considerações sobre a forma de representação dos objetos, a qual foi referida pelo autor como "registro do pensamento, em algum tipo de imagem". Ele discorre sobre o trabalho do homem pré-histórico na representação dos objetos e o processo em busca da determinação dos parâmetros de representação durante o percorrer do tempo.

Essa necessidade em registrar as imagens já mostrava a presença dos elementos científicos, como caracterizou Hildebrand (2001). Esses elementos serviam desde os homens da pré-história, para contabilizar objetos, fossem eles coisas, pessoas ou animais.

Ressaltando as formas gráficas de tridimensionalidade, também encontramos registros históricos, pois o homem pré-histórico também utilizava subsídios para tal representação.

> A representação de figuras através das diferentes formas perspectivas fez com que nossa cultura tivesse a capacidade de representar, numa superfície,

> numa superfície plana, elementos geométricos simulando três dimensões. (HILDEBRAND, 2001, p. 35).

Nas obras de arte, sabemos que existem trabalhos que utilizam fotografias, desenhos e pinturas que são cuidadosamente feitos com traços, que tendem a estar associados à perfeição. Gouveia (2007) retrata que desde o povo grego (300 a.C.), e com a retomada pelos pintores italianos no Renascimento (século XV), as técnicas de representação dos objetos foram aperfeiçoadas para que se pudesse atingir o realismo óptico, quer seja na representação dos ambientes, dos seres vivos ou dos seres inanimados. Porém, sabe-se que outros artistas não utilizam essas técnicas de representação e esboçam, nas imagens, a forma como se processa a sua interpretação.

Como podemos perceber, temos na Figura 21[17] as técnicas em perspectiva são utilizadas por Leonardo na Vinci nas obras arquitetônicas. Na Figura 22[18], apresentamos um quadro de Michelangelo, outro artista Renascentista que trabalha com as técnicas de desenho projetivo.

Figura 21: Templo centralizado, projeto de arquitetura, de Leonardo da Vinci

[17] Imagem disponível em <http://www.tg3.com.br/leonardo-da-vinci/>
[18] Imagem disponível em <http://www.universia.com.br/especiais/davinci/>

Figura 22: A Família Sagrada com o pequeno São João Batista, de Michelangelo, 1506

Sob outro viés, temos a obra de Tarsila do Amaral (Figura 23)[19], na qual não havia a preocupação com o realismo óptico. A artista buscava destacar outros elementos, que permitiam-lhe representar algo com uma interpretação peculiar, podendo então, mostrar-se como algo “deformado” aos olhos dos outros.

Figura 23: Abaporu, óleo sobre tela, de Tarsila do Amaral, 1928

Entretanto, além do desenvolvimento das técnicas de representação também consideramos os modos de representação dos meios informáticos. Conforme Hildebrand (2001), são as imagens em computação gráfica que simulam os objetos, que são inexistentes na realidade. Isso é feito por meio de codificações matemáticas que nos conduzem aos novos paradigmas de percepção.

[19] Quando pintou o "Abaporu", em 1928, querendo causar impacto em seu marido Oswald de Andrade, Tarsila iniciou o Movimento Antropofágico no Brasil. Este movimento, liderado por Oswald, propunha a "deglutição" da cultura européia, tranformando-a em algo bem brasileiro, e a figura do "Abaporu" idealizava o processo da deglutição. Site: http://www.tarsiladoamaral.com.br/index_frame.htm

Assim, em meio a essas diversas formas de representação apresentadas nos trabalhos de Leonardo da Vinci e Tarsila do Amaral e pela retomada de uma parte do estudo feito por Hildebrand (2001) iniciamos os modos de compreensão das formas possíveis de representação, como algumas figuras podem ser interpretadas, como uma dada reprodução de obra artística pode influenciar no desenvolvimento de uma Atividade Exploratório-Investigativa no trabalho realizado pelos alunos participantes desta pesquisa.

Para Flores (2003, p.24), “uma representação que se dá a partir de uma experiência visual e regida por concepções filosóficas e epistemológicas, atada à idéia da cópia do mundo real, fazendo tornar presente aquilo que está ausente para os olhos.” Assim, acreditamos no *olhar* de cada um e ressaltamos que essas considerações serão dadas durante todo nosso processo de análise dos dados constituídos nesta pesquisa.

Tal como vemos a importância desse trabalho, temos em uma Atividade Exploratório-Investigativa realizada nesta pesquisa, um episódio no qual uma mesma figura (Figura 24[20]) foi interpretada e representada de formas diferentes pelos alunos participantes da pesquisa. Como alguém representaria esta figura utilizando a cartolina? E em um *software* de representação tridimensional? Como interpretaria esta figura matematicamente? Será que outra pessoa responderia essas questões de uma mesma forma? Porém, não cabe fazer considerações desse fato neste momento, pois retomaremos este procedimento no Capítulo em que realizamos a análise dos dados da pesquisa. Mas colocamos esse exemplo aqui, como uma forma de ressaltar o modo de visualizar e representar de cada um, dada as experiências vividas.

Figura 24: L'olivier [El olivo], estanho derretido, esculpido e polido, Jules Brateau, 1897

[20] Imagem disponível em <http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/artes-decorativas.html>

3.3. O VISUALIZAR E O REPRESENTAR NO CONTEXTO DA TECNOLOGIA E DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> Das telas do cinema que exibem as imagens gráficas, ao computador com suas imagens virtuais, a exigência para os olhos é de total movimento. Parece-me, então, que somos solicitados a construir uma nova maneira de conceber o espaço, ou seja, um outro modo de olhar o espaço e os objetos dispostos no espaço, que já não seja mais aquele para o qual fomos educados desde três, quatro, cinco séculos atrás, e que se constitui no modo predominante e único de olhar. Ou, ao menos, de compreender que modo de olhar e de representar são esses que já não temos quase seu domínio técnico. (FLORES, 2003, p. 48).

Em nossos estudos sobre a visualização e a representação, nos deparamos com as palavras de Flores (2003) que nos fizeram refletir sobre os modos de *ver* da atualidade. A autora adverte sobre os cuidados que devemos tomar ao trabalhar com as experiências do olhar, o que faz parte da nossa proposta de pesquisa com os elementos tecnológicos atuais nas atividades didáticas em CDI I.

Assim, neste tópico, procuramos esboçar os conceitos de representação com a Matemática desenvolvida em CDI no contexto das tecnologias, buscando compreender, sobretudo, um pouco da teoria que permeia todo o processo de utilização do *software* tridimensional nesse trabalho.

Em um artigo publicado por Drijvers et al (2010), podemos identificar alguns desses aspectos. Os autores apresentam que as novas tecnologias e o seu potencial de representação contribuíram para a unificação das teorias sobre representação, pois havia uma falta de precisão teórica relativa às teorias sobre visualização, imagem mental e representação. Os autores destacam ainda os estudos de Kaput (1987 apud DRIJVERS ET AL, 2010), o qual propôs que um conceito de representação deve descrever cinco componentes, dados por: *a entidade representada; a entidade representante; aqueles aspectos particulares da entidade representada que estão sendo representados; aqueles aspectos da entidade representante de que são feitos os representantes; e a correspondência entre as duas entidades*.[21]

Esses componentes descritos serviram, posteriormente, para o desenvolvimento de muitos estudos sobre o tema. Tal como Kaput (1987) já havia previsto, haveria novos desenvolvimentos de natureza teórica com relação a representações no contexto das mídias

---

[21] Expressões originais dos cinco components de representação, proposto por Kaput (1987): *the represented entity; the representing entity; those particular aspects of the represented entity that are being represented; those aspects of the representing entity that are doing the representing; and the correspondence between the two entities.*

dinâmicas interativas. Dessa forma, podemos encontrar um pouco desse trabalho pelos pesquisadores tais como, Farias (2007), Garcia (2007), Flores (2003), Hildebrand (2001), Presmeg (2001), Miskulin (1999) e Villarreal (1999).

A maior parte desses autores supracitados, com os quais articulamos nossas idéias, utiliza da Teoria Semiótica de Charles Sanders Peirce que, igualmente, será a teoria na qual embasaremos nossas análises nesta pesquisa.

A opção de trabalho, abordando as considerações de tais autores, acontece com base em Miskulin (1999) por compreendermos que

> [...] a representação e a construção de objetos bidimensionais e tridimensionais no espaço constituem uma tarefa complexa que exige do usuário raciocínios abstratos e processos de codificação e decodificação dos elementos que compõem esses objetos representados no plano (MISKULIN, 1999, p. 288).

Serão esses os elementos presentes em nossa pesquisa, em conjunto com um ambiente que permite simular diversos ambientes, dentre os quais aqueles que nós concebemos mentalmente (HILDEBRAND, 2001), o qual constitui o *software*.

Essa abordagem dos elementos visuais acerca das representações matemáticas por meio do *software* matemático, provoca na visualização "um significado no processo de transformação, compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos" (FARIAS, 2007, p. 57). É com tal intuito, portanto, que continuaremos nosso capítulo explorando a Teoria Semiótica.

3.4. INTRODUÇÃO À SEMIÓTICA SOB A PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

> Talvez seja ingênuo, de nossa parte, querer melhorar o modo de ver de nossos alunos, a partir de um conjunto de atividades desenvolvidas em sala de aula, ou ainda, procurar explicar como a atividade do olhar se processa em cada um de nós. Talvez esta complexidade envolva muitos outros elementos que não estejam, unicamente, ligados às figuras em si, nem à capacidade visual de cada um de nós. Talvez fosse o caso de, antes de tudo, analisarmos o fato de que uma imagem é a representação de um modo de olhar (FLORES, 2003, p. 24).

Ainda pelo contido no trabalho de Flores (2003), advêm outras reflexões sobre nossa proposta de pesquisa, nossos objetivos e, principalmente, sob quais aspectos e por meio de qual teoria estaríamos investigando nossos dados e constituindo nossa Dissertação.

Assim sendo, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, encontramos a possibilidade de utilizar a Teoria Semiótica como inspiração para descrever a analisar o processo de constituição do conhecimento por meio de determinados fenômenos que acontecem nas representações algébrica, geométrica e gráfica (GARCIA, 2007).

Como Santaella (2007) define:

> A Semiótica é a ciência que tem por objetivo de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e sentido. (SANTAELLA, 2007, p. 13).

Neste tópico, portanto, propomos apresentar um pouco do trabalho desenvolvido por Charles Sanders Peirce nesse campo da Teoria Semiótica. Essa teoria nos permite compreender o modo como os alunos participantes da pesquisa trabalham com a linguagem, no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas por meio dos processos de visualização e de representação.

Em um primeiro momento, entretanto, pode causar estranheza pensar na linguagem vinculada a esses processos que se relacionam aos conhecimentos matemáticos. Araújo (2004, p. 28) expõe que essa dúvida pode ocorre no conflito conceitual que trazemos sobre língua e linguagem. Para a autora, precisamos entender que todas as sociedades possuem "um meio de comunicação articulado, a linguagem", que se caracteriza fundamentalmente por ser "'multiforme' e demandar a abordagem física, fisiológica, psíquica, estando ao mesmo tempo no domínio do individual e do social."

Isso significa dizer que, quando nos referimos à linguagem, mencionamos as diversas formas de comunicação, tais como "leitura e/ou produção de forma, volumes, massas, interações de forças, movimentos" como também "de dimensões e direções de linhas, traços, cores...". Essa comunicação também pode acontecer por meio de "imagens, gráficos, sinais, setas, números, luzes" e por "objetos, sons musicais, gestos, expressões, cheiro e tato, através do olhar, do sentir, do apalpar" (SANTAELLA, 2007, p. 10)

Com esse estudo, portanto, buscamos categorizar as diferenças e as generalizações nos diversos fenômenos - advindos no trabalho realizado pelos alunos participantes da pesquisa - a fim de sinalizá-los e classificá-los para poder tecer análises dos dados constituintes da pesquisa.

3.4.1. Algumas Considerações sobre a Semiótica

Peirce baseou-se nos princípios da Fenomenologia[22] para desenvolver a Teoria Semiótica. Como Garcia (2007, p. 23) define, Semiótica é uma “ciência capaz de examinar a constituição dos fenômenos de produção de significação e de sentido, através do uso diversificado da linguagem.”

Foi após anos de estudo que Peirce “concluiu que tudo que aparece à consciência, assim o faz numa gradação de três propriedades que correspondem aos três elementos formais de toda e qualquer experiência” (SANTAELLA, 2007, p. 35). Essas três propriedades, classificadas por um dado nível de compreensão do fenômeno, foram nomeadas por: *Primeiridade*, *Secundidade* e *Terceiridade*.

Em uma primeira apresentação, essas três categorias parecem simples dado a forma como são conceituadas, mas na medida em que tentamos interpretá-las no ambiente em que vivemos ou pelas sensações que trazemos - nos fenômenos -, notamos que esse processo requer uma atenção e um estudo minucioso para atingir um nível de compreensão adequado. Assim, optamos por descrever cada categoria separadamente, e ao final, buscaremos incluir alguns exemplos que podem facilitar nosso entendimento.

Iniciamos com a exposição da *Primeiridade* que, segundo Santaella (2007, p. 43), trata-se de uma “consciência imediata”, uma “pura qualidade de ser e de sentir”. Esta qualidade representa o primeiro nível de categorização, e como também expõe Araújo (2004, p.47) caracteriza-se pela “novidade, vida, liberdade, tudo o que pode ser, os fenômenos simples e livres, completos em si.”

É sabido que “onde quer que haja um fenômeno, há uma qualidade, isto é sua *Primeiridade*. Mas a qualidade é apenas parte do fenômeno, visto que, para existir, a qualidade tem que estar encarnada numa matéria” (SANTAELLA, 2007, p. 47). Portanto, quando se dá a “corporificação material” da qualidade já se denomina *Secundidade*.

Para Araújo (2004), este segundo nível representa as formas mentais, intenções e expectativas. Como uma forma de clarificar esses conceitos, o autor relaciona os dois níveis que acabamos por apresentar, respectivamente, pelas palavras *Originalidade* e *Obsistência*. Assim, a *Originalidade* “designa o ser como ele é”, ou seja, a *Primeiridade*. Enquanto a *Obsistência* “ocorre pelo contato com alguma outra coisa que obriga uma modificação, a reações”, a *Secundidade*.

A *Terceiridade*, conseqüentemente, seria a mediação ou modificação dos dois níveis anteriores por meio dos processos de comunicação, nomeada por Araújo (2004, p.47) como

---

[22] Observa os fenômenos e, através da análise, postula formas ou propriedades universais desses fenômenos. (SANTAELLA, 2007, p. 29).

Transuação. Como Santaella (2007, p. 51) assume, essa categoria representa a "inteligibilidade, ou pensamento em signos, através do qual representamos e interpretamos o mundo". O signo, citado neste momento, é o elemento capaz de simbolizar os objetos na nossa mente, no nosso falar, no modo como concebemos alguma coisa, do qual faremos uma explicitação posteriormente.

Para explicitar os três conceitos abordados, optamos por exemplificá-los procurando aproximar a teoria do contexto em que podemos elucidá-la. Essa seria uma forma de relacionar a *Primeiridade*, a *Secundidade* e a *Terceiridade* ao conteúdo que pretendemos abordar nesta pesquisa. O artigo publicado por Presmeg (2001) apresenta três dessas relações, associando as categorias aos fatos cotidianos. Buscaremos expor esses exemplos trazidos pela autora como também um quarto exemplo, o qual elaboramos, relacionado ao ensino da Matemática.

Dessa forma, Presmeg (2001) associa a *Primeiridade* ao objeto **máquina de costura**. Quando temos a **foto da máquina de costura** ou a **foto de uma parte da máquina** já passamos a considerar o nível *Secundidade*. Desse contato, temos a relação que cada indivíduo constituirá para definir, por exemplo, a **função que ele considera ter a máquina de costura**, o que seria a *Terceiridade.* Essa apreensão pode ser dada pelo indivíduo, ao relacionar o objeto "foto da máquina de costura" com as demais experiências sobre este objeto.

Outro exemplo dado por Presmeg (2001, p. 2) o qual nós buscaremos explicitá-lo, corresponde à idéia: "**A maioria sempre está certa?**". Essa pergunta relaciona-se ao objeto *Primeiridade*, mas logo passamos ao nível de *Secundidade*, quando lidamos com os múltiplos signos envolvidos. Esses signos são informações que estão relacionadas a essa pergunta, por exemplo, **uma descrição verbal em um livro que exemplifica uma pessoa de visão religiosa, pertencente a um grupo menor, o qual é fonte de discriminação por outro grupo.** Desse conjunto de signos, que podemos relacionar às experiências, teremos como resultado uma interpretação singular feita por cada indivíduo perante a frase que estamos considerando. Consideramos que este signo, resultado da interpretação, constitui o nível de *Terceiridade,* que, nesse caso, pode ser representado pela percepção do indivíduo ao concluir que **a maioria não está sempre certa**.

A **probabilidade de chuva** é o terceiro exemplo dado pela referida autora, e isso corresponde ao que denominamos *Primeiridade*. Ao termos a possibilidade de contato com o **barômetro, e vermos que o nível do líquido, que marca a pressão atmosférica, está caindo**, estes momentos são representados pela *Secundidade.* Com o conhecimento desses dados, logo tomaremos uma decisão sobre este assunto, que é dado pela *Terceiridade.* Esta decisão pode nos **induzir a levar um guarda-chuva ao sair de casa**, ou seja, após realizar interpretações por meio dos artifícios cabíveis, tomamos decisões sobre o evento.

No quarto exemplo optamos por desenvolver de acordo com as Atividades Exploratório-Investigativas que aplicamos nesta pesquisa. Quando os alunos estão frente a uma questão, por exemplo, **"Identifique superfícies de revolução presentes nas figuras escolhidas."**, esse objeto representa o nível *Primeiridade*. Para responder a questão, os alunos devem estar em **contato com algumas figuras** encontradas nas páginas da *internet* e procurarão saber o **conceito de superfície de revolução**. Ao trabalhar com os conceitos de superfície de revolução e visualizar algumas figuras que representam tal conceito, ou outros objetos relacionados, podemos dizer que estamos na *Secundidade*, a qual é logo representada pela *Terceiridade.* Esse terceiro nível corresponde aos momentos em que os alunos começam a relacionar os conhecimentos e as informações que eles têm, permitindo **selecionar e generalizar as figuras em que podem ser identificadas superfícies de revolução,** de acordo com as vivências dos alunos.

Por meio do conceito explicitado e dos exemplos abordados, podemos perceber, então, o quanto a linguagem é importante no nosso convívio social. É de se pensar o quão seria implacável até as mais simples intervenções do homem sem "a linguagem nomeando, designando, situando, esclarecendo, discriminando, recortando, afirmando, etc., enfim, sem algum tipo de semiose, isto é, de processo sígnico". (ARAÚJO, 2004, p. 39).

Mas o que vem a ser esse processo sígnico? Na Teoria da Linguagem, então, temos as diversas formas de comunicação realizadas por meio dos signos lingüísticos. Para Santaella (2007), isso significa dizer que qualquer estímulo emitido pelos objetos do mundo (*sinais*) ao contato com o homem, pode sofrer um processo de alteração e passa a representar produtos da consciência (*signos* ou *linguagens*).

Os *signos*, dessa forma, "designam, isto é, querem dizer algo, significam, porém não referem" (ARAÚJO, 2004, p.35). Eles compõem as várias formas de representação de um objeto, por exemplo, a *palavra* função, a *representação algébrica* de uma função e o *esboço* de uma função, são *signos* do objeto função.

> O significado de um signo é outro signo – seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou um mero sentimento de alegria, raiva... uma idéia ou sei lá o que for – porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro) (SANTAELLA, 2007, p.59).

Porém, o signo não é algo acabado, um elemento estável, ele passa por um processo de construção e está sempre em evolução. Ele corresponde ao "[...] conhecimento de um objeto a partir do conhecimento de outro objeto que é representado". (GARCIA, 2007, p. 28). Para compreendê-lo melhor, Peirce (2008) relacionou um signo a três entidades, *Representâmen*[23], *Objeto* e *Interpretante,* os quais são referidos pelo autor

> Um signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo assim criado denomino *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto*. Representa esse objeto não em todos os seus aspectos, mas com referência a um tipo de idéia que eu, por vezes, denominei *fundamento* do representâmen (PEIRCE, 2008, p. 47).

Como veremos em seguida, essas três categorias podem ser compreendidas pelo modelo triádico de Peirce, ao qual está relacionado a *Primeiridade*, a *Secundidade* e a *Terceiridade*. De modo sucinto temos que o signo, em Primeiridade, corresponde aos elementos sintáticos e qualitativos do Representâmen, Objeto Imediato e Interpretante Imediato. Em Secundidade, esses elementos têm correspondência com o Objeto Dinâmico e com o Interpretante Dinâmico. E em Terceiridade, temos o Interpretante Final. Em seguida, procuramos explicitar cada um desses elementos.

"O signo é constituído por um significante, denominado por Peirce de *Representâmen* ou ainda, de fundamento que, como já constatamos, sempre nos remete a um objeto de referência" (HILDEBRAND, 2001, p. 63). Assim, podemos relacioná-lo ao primeiro contato que temos com o signo, tal como o objeto se apresenta no primeiro instante para nós.

Em seguida, quando entramos em contato com esse signo, retomamos algumas informações que trazemos sobre ele, formas aproximadas de representação, o que pode ser caracterizado por *Objeto Imediato* ou *Objeto Dinâmico.* O *Objeto Imediato* é "o objeto como é representado no signo". O *Objeto Dinâmico* corresponde àquele pelo qual "o signo não consegue expressar" (HILDEBRAND, 2001, p.65), podendo apenas indicá-lo sob a forma de uma representação que pode ser modificada posteriormente.

O outro correspondente do signo é o *Interpretante*. Para Santaella (2007, p.61) o *Interpretante* "será um pensamento que traduzirá o signo anterior em um outro signo da mesma natureza", este conceito não consiste no modo como a mente reage as condições em que está posta. Para entender melhor, podemos ser subdividir o *Interpretante* também pela

[23] Como Peirce (2008, p.61) considera, *Representar* é "estar no lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro." Em sua Teoria Semiótica ele baseia neste conceito e para distinguir Representação - o ato ou relação de representação - de Representâmen - aquilo que representa.

classificação triádica de Peirce, designados por: *Interpretante Imediato, Interpretante Dinâmico* e *Interpretante Final.*

O primeiro deles, *Interpretante Imediato,* é a interpretação que fazemos sem reflexões sobre o signo, algo que acontece naturalmente (PEIRCE apud HILDEBRAND, 2001). Podemos dizer que é a potencialidade que trazemos da interpretação do signo, algo já presente em nós, pois somos nós os interpretantes.

Já o *Interpretante Dinâmico* é "aquilo que o signo *efetivamente* produz na sua, na minha mente, em cada mente singular" (SANTAELLA, 2007, p. 60), o que passa a significar uma interpretação individual e singular, na qual se mostra única e diferenciada em cada momento em que possa acontecer.

Por fim, o último dos interpretantes, o *Interpretante Final,* é aquele que acontece "na ação entre o signo e a mente interpretadora no efetivo ato da interpretação" (HILDEBRAND, 2001, p. 67). Poderemos relacionar à combinação entre todas as interpretações, a partir das quais obtemos um resultado que cada interpretante faz sobre o signo nesse processo. Isso significa que, apesar de falar em uma interpretação "final", que podemos relacionar a um "resultado", ressaltamos que um signo está sempre em um processo de composição e, com isso, sofre mutações constantes.

Hildebrand (2001) tornou mais claras essas definições para nós, ao procurar exemplificá-las. Optamos por expor aqui esse mesmo exemplo dado pelo autor, porém, com algumas modificações, o qual trazemos com o acréscimo de alguns elementos relacionados ao nosso ponto de vista. Neste exemplo, consideramos o *zero.* Como *Representâmen,* temos o dizer **zero**. Esse signo é relacionado, pela maioria das pessoas, pelo ato de **contar** (*Objeto Imediato*) em paralelo com as **representações de seu formato dada pelo ato de mentalização ou esboço no papel** (*Objeto Dinâmico*). Desse processo, por conseqüência, são lançadas as **interpretações vagas** (*Interpretante Imediato*), com diversas possibilidades de significação, sem preocupação pelo certo ou errado, no qual buscamos organizá-las. Dessa organização do pensamento, temos o segundo nível de interpretação, por exemplo, **ao significado de ser nulo, ser a falta de algo, ser uma quantidade inexistente** (*Interpretante Dinâmico*). Assim, estabelecemos relações com os interpretantes que conhecemos, até chegarmos a definir **algo representativo** para o dizer *zero* (*Interpretante Final*).

Desse exemplo, portanto, percebemos como o signo representa este complexo de relações. Assim, para buscar compreender essas relações de modo mais simples e claro, Peirce (2008) desenvolveu um processo de classificação dos signos conforme três tricotomias. Na primeira tricotomia, podemos ter a relação do signo em si mesmo como uma mera qualidade (Qualisigno), um existente concreto (Sinsigno) ou uma lei geral (Legisigno); a segunda tricotomia relaciona-se ao signo para com seu objeto, e pode consistir no fato de o signo ter algum caráter em si mesmo (Ícone), ou manter alguma relação com um interpretante (Índice ou Símbolo); e a terceira tricotomia, relaciona-se à forma de seu Interpretante representá-lo como um signo de possibilidade (Rema) ou como um signo de fato (Dicente) ou como signo da razão (Argumento).

Porém, neste trabalho, não utilizaremos essas categorias[24] indicadas anteriormente por entendermos que não vêm contribuir diretamente com o objetivo de nossa pesquisa.[25]

Vale indicar também que, como apresenta Santaella (2007), as três tricotomias fazem parte das 10 tricotomias estabelecidas por Peirce. Dessas tricotomias temos numerosas subdivisões em classes de signo, e essas classes, sofrem subdivisões em tipos de signo. Entretanto, as outras sete tricotomias não são explicitadas neste trabalho.

Portanto, nossa descrição sobre a Teoria Semiótica será processada na análise dos dados. Entretanto, primeiramente, explicitaremos os aspectos metodológicos que compõem os dados da pesquisa, nos quais teceremos nossas considerações apoiadas na Teoria Semiótica.

[24] Qualisigno, Sinsigno, Legisigno, Ícone, Índice, Símbolo, Rema, Dicente e Argumento

[25] Para uma melhor compreensão das categorias inerentes a estas três tricotomias, ver Santaella (2007), Peirce (2008)

4. METODOLOGIA DA PESQUISA

O "pesquisar" consiste em um trabalho de estudo e interpretação, elaborado através de fontes teóricas e pela constituição de dados, os quais possibilitam uma análise de eventos que se apresentam ao longo deste percurso.

Cada pesquisa compõe um novo trabalho, que apresenta relações entre as teorias e os dados originais, inserção de outras percepções e informações diversificadas. Por mais que tenhamos elementos comuns entre determinados trabalhos, sempre serão estabelecidas novas relações, considerações e conclusões pelo pesquisador.

Em particular, o objetivo do presente trabalho é buscar compreender[26] os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Para esse processo de compreensão que se encontra inserido em um ambiente social de natureza "idiográfica (não repetível) e holística (que exige a visão da totalidade)" (ALVES-MAZZOTTI E GEWANDSZNAJDER, 1998, p. 148), entendemos como necessária e indispensável a utilização da Metodologia de Pesquisa Qualitativa como suporte na constituição e análise dos dados, acreditando

> [...] que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, uma interdependência viva entre o sujeito e o objeto, um vinculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito. O conhecimento não se

[26] Segundo a chamada lógica de Port-Royal, a compreensão é o conjunto de atributos que são consequência semântica de um termo ou conceito. Assim, atributos como *substância, material, viva* e *sensível* constituem a compreensão do conceito *animal*. A compreensão de um termo ou conceito distingue-se da sua extensão. Esta é o conjunto de indivíduos ou entidades a que o termo ou conceito se aplica. A extensão do conceito de animal inclui todo e qualquer animal que exista, tenha existido ou venha a existir. A compreensão de um termo ou conceito não é alterada pelo número de indivíduos a que se aplique esse conceito: o conceito de animal permanece o mesmo quer se aplique a um indivíduo, a milhões de indivíduos ou a nenhum indivíduo. *Ver extensão, intensão*. Disponível em: http://www.defnarede.com/c.html (DICIONÁRIO VIRTUAL)

> produz a um rol de dados isolados, conectados por uma teoria explicativa; o sujeito-observador é parte integrante do processo de conhecimento e interpreta os fenômenos, atribuindo-lhes significado. O objeto não é um dado inerte e neutro; está possuído de significados e relações que sujeitos concretos criam em suas próprias ações (CHIZZOTTI, 2001, p. 79).

Em meio a essas características, notamos que alguns dos aspectos dessa metodologia não são baseados por procedimentos estruturados e não estruturados. Os dados que são constituídos mostram situações que, segundo Goldenberg (2003, p. 53), obrigam "o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los"

Deste modo, a fim de esclarecer a condução do trabalho, este capítulo busca descrever a metodologia utilizada na pesquisa que desenvolvemos, como também, apresentar algumas considerações iniciais extraídas dos dados constituídos durante esse processo.

Destacamos que nesse processo são investigados os processos mentais e computacionais envolvidos nos processos de visualização e representação de conceitos matemáticos de CDI de alunos pertencentes à turma de CDI I[27] – objeto da presente pesquisa, durante seis meses do ano de 2008 e alunos da turma de CDI II nos dois meses do ano de 2009, períodos referentes à didática aplicada pela professora da classe, durante as aulas e o trabalho realizado posteriormente pela pesquisadora.

No que se refere aos procedimentos de investigação e de análise da presente pesquisa, em um primeiro momento foi realizada a Observação do conteúdo apresentado nas aulas de CDI I, do desenvolvimento dos alunos diante dessa metodologia de ensino e a utilização de representações na exposição do conteúdo e na resolução dos exercícios. Para isso, fez-se necessária a presença da pesquisadora durante todo um semestre na sala de aula onde ocorreu a disciplina.

Em um segundo momento – no ano de 2009 – foram realizadas Entrevistas com os sujeitos da pesquisa – alunos da turma referida anteriormente que se propuseram a participar da pesquisa – os quais desenvolveram, nos momentos posteriores, Atividades Exploratório-Investigativas que utilizaram reproduções de obras artísticas, de objetos manipuláveis e o *software* K3DSurf.

Estas Atividades Exploratório-Investigativas permitiram uma abordagem do conteúdo de sólidos de revolução com alguns alunos que cursaram a disciplina de CDI I em 2008. Realizamos seis Atividades Exploratório-Investigativas que buscaram conhecer as noções e os conceitos de sólidos e superfícies dos alunos, os caminhos e as estratégias abordados por estes

---

[27] Turma do Curso de Graduação em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro - SP

alunos durante atividades de visualização e representação dos conceitos matemáticos, e a capacidade dos alunos em propor estratégias de resolução dos problemas indicados. Os alunos, então, para resolver e/ou responder as questões, eram orientados a procurar reproduções de obras artísticas em sites da internet, em que algumas delas eram sugeridas pela pesquisadora. Eles poderiam consultar os sólidos manipuláveis e cartolina para a montagem de outros sólidos, como também utilizar o *software* K3DSuf para representação e visualização de funções matemáticas.

Baseado nas características essenciais da investigação qualitativa, classificadas por Bogdan e Biklen (1994) ressaltamos que tal como a realização das Atividades Exploratório-Investigativas, os depoimentos dos alunos também foram de fundamental importância para a análise posterior dos resultados. A proposta consistiu em levar os sujeitos da pesquisa a expressarem livremente suas opiniões sobre determinados assuntos. O caráter flexível desse tipo de abordagem permitiu aos sujeitos responderem de acordo com sua perspectiva pessoal, em vez de se moldar em questões previamente elaboradas.

Ainda de acordo com Bogdan e Biklen (1994), dado o detalhe pretendido, a pesquisa em questão foi conduzida por pequenas amostras. A constituição dos dados não objetivou confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida em que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando. Os resultados escritos da investigação contém citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação, incluindo transcrições de Entrevistas, notas de campo, fotografias, documentos pessoais e outros registros oficiais. Durante as análises são utilizadas fontes de leituras em Educação Matemática; Informática na Educação; e pesquisas feitas na área de estudo proposta. A participação no Grupo de Pesquisa na área de Formação de Professores[28] também propiciou um ambiente de discussões sobre o significado dos processos de visualização e de representação no ensino e aprendizagem de futuros professores de Matemática.

Nesta descrição dos procedimentos também buscamos validar nossa pesquisa ao meio acadêmico, "levando-se em conta que a escolha do procedimento e das técnicas adequadas é ponto crucial para o desenvolvimento e a fidedignidade dos resultados das pesquisas." (ROSA, 2006, p. 13).

Inicialmente, quando elaboramos tal proposta de trabalho, tínhamos como foco principal a aplicação de Atividades Exploratório-Investigativas que discorresse sobre o

[28] Grupo de Formação de Professores coordenado pela Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin e Profa. Dra. Miriam G. Penteado, UNESP/Rio Claro - SP – site: http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp/

conteúdo de Cálculo. Porém, durante a discussão do projeto, acreditamos ser necessário conhecer um pouco mais do ambiente em que os alunos estavam inseridos, tentar entender um pouco a forma como o conteúdo de Cálculo era apresentado para eles, e também buscar compreender como cada aluno estava envolvido com o curso e com os métodos que iríamos trabalhar.

Assim, compartilharemos durante este capítulo, nossa trajetória ou movimento de pesquisa, desenvolvida por um período de Observação - em uma turma nas aulas de Cálculo, Entrevistas realizadas anteriormente ao início das Atividades Exploratório-Investigativas, e Atividades Exploratório-Investigativas com os alunos participantes desta pesquisa.

4.1. OBSERVAÇÃO DAS AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

O primeiro momento de constituição de dados desta pesquisa foi a partir da Observação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Matemática[29] no turno da manhã, duas vezes por semana, sempre às segundas e às quartas-feiras, no segundo semestre de 2008.

A participação da pesquisadora observando aulas desta disciplina, em um determinado período, tinha como intenção entender como o conteúdo era exposto pela professora, e como os alunos buscavam assimilá-lo, focando principalmente como a representação e a visualização estavam presentes no trabalho dos alunos e da professora nestes momentos presenciados.

Deste o primeiro dia de contato com essa turma, pudemos presenciar momentos de explicação de conteúdo e participação dos alunos nas aulas, que foram anotados para uma posterior utilização no trabalho. Estes momentos caracterizaram-se, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998) por uma Observação não-estruturada

> [...] na qual os comportamentos a serem observados não são pré-determinados, eles são observados e relatados da forma como ocorrem, visando descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação (ALVES-MAZZOTTI E GEWANDSZNAJDER, 1998, p. 166).

Primeiramente, faremos uma descrição de alguns elementos constituintes dessa Observação, que segundo Chizzotti (2001) são representados pelas formas de participação do pesquisador, as circunstâncias da participação e os diversos instrumentos utilizados no registro da Observação. No corpo da dissertação, faremos a exposição desses elementos, que

[29] IGCE/UNESP – Rio Claro

segundo este mesmo autor representa o resumo descritivo das observações, ou seja, os momentos das reflexões de campo e as situações de percepções, hesitações, interferências, conflitos, empatias etc., além de técnicas, dados e fatos cotidianos.

4.2. SELEÇÃO DOS ALUNOS DA PESQUISA

Durante esta etapa inicial de Observação na turma de Cálculo I, não selecionamos os alunos que participariam das Atividades Exploratório-Investigativas contidas nessa pesquisa. No semestre seguinte ao período de Observação, voltamos à turma de Cálculo I, atualmente cursando Cálculo II e com a autorização prévia e concedida pela professora desta turma interrompemos um momento da aula e expusemos alguns elementos do projeto.

A pesquisadora justificou a presença dela nas aulas de Cálculo I como observadora e expôs a proposta de Atividades Exploratório-Investigativas com um grupo que desejassem participar como voluntário da pesquisa. Neste momento, seis alunos mostraram-se interessados no projeto e marcaram um primeiro encontro com a pesquisadora, assim, a proposta das Atividades Exploratório-Investigativas poderia ser explicitada melhor, e os dias e os horários, em que as Atividades Exploratório-Investigativas seriam aplicadas, poderiam ser organizados. Desses alunos, apenas três desses alunos prosseguiram no projeto, sendo que os que desistiram apresentaram problemas de disponibilidade de horário, e uma quarta aluna compareceu à primeira reunião mostrando-se interessada em participar, juntando-se aos três colegas que estavam no grupo.

4.3. ENTREVISTAS

Quando propusemos a aplicação de Atividades Exploratório-Investigativas com um grupo de alunos que cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I em 2008, consideramos fundamental conhecer um pouco mais desses alunos, suas expectativas sobre o curso que estavam fazendo e sobre as Atividades Exploratório-Investigativas que iriam participar. Em um primeiro encontro com esses alunos, após expor como as Atividades Exploratório-Investigativas seriam dirigidas, qual o conteúdo que seria trabalhado como também quais os instrumentos que seriam utilizados, propusemos um momento com Entrevistas/relatos individuais, buscando ter conhecimento sobre

> [...] atitudes, sentimentos e valores subjacentes ao comportamento, o que significa que se pode ir além das descrições das ações, incorporando novas

> fontes para a interpretação dos resultados pelos próprios entrevistadores (ROSA, 2006, p. 23).

Os alunos presentes foram convidados a participar dessa Entrevista, a qual consideraram melhor que fosse realizada logo depois da nossa conversa. Como já havíamos organizado as questões a serem investigadas nas Entrevistas consideramos viável fazê-la e, de forma individual, com o auxílio de um gravador de voz e um caderno de campo, realizamos as Entrevistas com os alunos seguindo um roteiro de perguntas pré-selecionadas.

O objetivo da Entrevista foi conhecer um pouco dos alunos que participariam das Atividades Exploratório-Investigativas. Detalhando um pouco nosso objetivo, procuramos perceber a motivação dos alunos ao iniciar um curso de matemática e a importância que eles davam ao conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral I. Além disso, buscamos entender o conhecimento que os alunos apresentavam no conteúdo de Sólidos de Revolução, a familiaridade e a utilização da tecnologia por eles, e os recursos que eles utilizavam durante os estudos das disciplinas. Também se mostrava importante saber quais as disciplinas com as quais eles se mostravam mais afetuosos ou não gostavam tanto, e buscar compreender o motivo pelo qual eles relatavam ter esses sentimentos, o que objetivava, para nós, um maior entendimento sobre as representações que eles tinham mais familiaridade (como as representações algébricas, geométricas ou aritméticas).

E assim, realizamos a Entrevista semi-estruturada, segundo ROSA (2006), a qual seguiu assemelhando-se a uma conversa, pois não seguíamos rigidamente o fraseamento e a ordem estabelecida. De acordo com as situações e eventos que os alunos iam relatando, avaliávamos a ordem em que as perguntas eram feitas e a necessidade de fazê-las, ocorrendo até nos próprios relatos dos alunos, as respostas à algumas perguntas que ainda não haviam sido colocadas.

Este tipo de Entrevista Qualitativa é habitualmente classificado como semi-estruturada, pois as “questões seguem uma formulação flexível, e a sequência e as minúcias ficam por conta do discurso dos sujeitos e da dinâmica que acontece naturalmente.” (ROSA, 2006, p. 31) Segundo Nahoum (1961 apud ROSA 2006, p. 32) ainda podemos classificá-la como do tipo “Entrevista de Diagnóstico”, por “recorrer à biografia do sujeito, determinando, através dos questionamentos e das respostas dadas, suas opiniões, atitudes e características pessoais.”

Sempre preocupados em acompanhar essas denominações apresentadas, expusemos em seguida, as questões presentes na proposta de Entrevista (Anexo I,), tal como foi organizada e proposta aos alunos: 1. Nome e idade; 2. E-mail e telefone; 3. Cidade e estado de origem; 4. Cidade e estado onde mora atualmente; 5. Qual a motivação para fazer o curso de matemática?; 6. Tem facilidade para entender os conteúdos matemáticos?; 7. Você conhece o currículo do curso? a. Quais as disciplinas que mais gosta? Por quê? b. Quais as disciplinas que mais tem ou teve dificuldade para assimilar o conteúdo?; 8. Como costuma estudar matemática? (resolve os exercícios, estuda a teoria, usa o livro, apontamentos, por exemplo); 9. Você acha importante entender noções e conceitos mais primitivos/básicos?; 10. Você acha que as articulações entre as representações algébricas, geométricas e aritméticas auxiliam na compreensão do conteúdo matemático? Por quê?; 11. Você procura recursos diferentes dos indicados pelo professor para estudar matemática?(software, objetos manipulativos, jogos, livros, vídeo, por exemplo); 12. O que você acha do uso do computador como recurso para aprender matemática? Já usou algum software educativo?; Qual? 13. Pretende ser professor de matemática? Por quê?; 14. Na sua opinião, a disciplina Cálculo é importante? Por quê? Qual a influência da disciplina Cálculo para formação do futuro professor de Matemática?; 15. Você gosta de estudar individualmente ou em grupo?; 16. O que o motivou a participar dessa pesquisa?

Para a Entrevista, contamos com depoimentos dos alunos, todos do segundo ano do curso de Matemática, que se disponibilizaram a participar das Atividades Exploratório-Investigativas. Como combinado com os participantes, não disponibilizaremos a identidade deles na pesquisa, designando-as apenas por uma letra, cada um deles, que ficaram indicados por Aluno E, Aluno G, Aluno J e Aluno N. A Entrevista com cada uma será descrita pelos relatos que consideramos nesta pesquisa serem mais significativos contendo, juntamente, uma síntese interpretativa.

4.4. ATIVIDADES EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Após as Entrevistas, pudemos iniciar o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas em Matemática. Os dados constituídos por meio desse procedimento metodológico, apoiados em teorias de ensino e aprendizagem e nos procedimentos de Observação e Entrevista, permitem atingir nosso objetivo quanto à compreensão dos processos de visualização e representação de conceitos matemáticos.

O conjunto de Atividades Exploratório-Investigativas elaboradas para a presente pesquisa aborda noções e conceitos geométricos, tais como: Sólidos, Superfícies, Volumes e, com ênfase, Sólidos de Revolução, no qual trabalha-se a identificação do conceito de Integral para o cálculo da área das superfícies e volume desses sólidos. Neste contexto, disponibilizamos alguns sites para consultas de reproduções de obras artísticas, as quais foram utilizadas pelos alunos nas questões que foram desenvolvidas nas Atividades Exploratório-Investigativas.

Sabemos que ao trabalhar com este tipo de Atividade ou Problema, com os sujeitos da pesquisa, permitimos que estes se envolvam

> [...] em processo de investigação de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e re-elaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema (MISKULIN ET AL, 2007, p. 31).

Mas para que sejam obtidos resultados favoráveis, Miskulin et al (2007) explicita que é fundamental a mediação do professor no desenvolvimento da atividade ou problema de Matemática, pois é capaz de criar situações desafiadoras, investigativas, busca de novos caminhos e reavaliação constante de estratégias e objetivos.

Este tópico, então, permite conhecer o processo de desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas. Desta forma, poderemos compreender as dimensões implícitas nos processos de visualização e de representação de conceitos de CDI, no contexto das TIC, o que não seria possível atingir analisando apenas os resultados finais desse trabalho, como elucida Ponte et al (2003)

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, [...] podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona (PONTE ET AL, 2003, p. 17).

Quanto ao conteúdo das Atividades Exploratório-Investigativas, apontaremos os objetivos e o encaminhamento dado a elas. Estes apontamentos, em um primeiro momento, mostraram-se condizentes para abordar o nosso objetivo de pesquisa, no qual separamos em subtópicos cada Atividade Exploratório-Investigativa com a fase de desenvolvimento dos alunos em cada uma delas.

4.4.1. Atividade Exploratório-Investigativa 1

A Atividade Exploratório-Investigativa 1 buscou *Investigar as possíveis inter-relações sobre as noções e conceitos de superfície, sólido e volume dos alunos.* Na primeira Atividade Exploratório-Investigativa (ANEXO 2) que propusemos, trabalhamos com cinco alunos do segundo ano curso Superior em Matemática, abrindo uma discussão sobre os conceitos geométricos sobre superfície, sólido e volume, e permitimos que eles pudessem discutir os conceitos juntos, almejando que um auxiliasse o outro.

Distribuímos para cada aluno, as cinco questões da primeira Atividade Exploratório-Investigativa, sendo: 1.1.) Escrevam, com suas palavras, o que vocês pensam sobre **superfície**. Vocês podem acrescentar exemplos para ilustrar seu conceito. 1.2.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **sólido**. 1.3.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **volume**. 1.4.) Vocês acham que existe uma relação entre **superfície e sólido**? Qual seria? 1.5.) Vocês acham que existe uma relação entre **volume e sólido**? Qual seria?

Propusemos que eles se dividissem em um trio e uma dupla para responder as questões, mas que a discussão estaria aberta para cinco alunos juntos. Destacamos a importância das discussões e descrição de todos os conceitos pensados pelos alunos para o prosseguimento do trabalho, sem a preocupação com respostas certas ou o erradas.

4.4.2. Atividade Exploratório-Investigativa 2

A Atividade Exploratório-Investigativa 2 (ANEXO 3) teve como objetivos: *Investigar a capacidade de justificação do aluno; Analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; Analisar o conhecimento de conceitos básicos da Geometria (conhecimento matemático); e Investigar a capacidade de generalização do aluno*. Essa Atividade Exploratório-Investigativa possibilitou aos alunos discutirem e desenvolverem os conceitos formais sobre superfície, sólido e volume, através de materiais manipuláveis, dicionários, tutoriais e livros didáticos, buscando tirar algumas dúvidas que se mostraram presentes na Atividade Exploratório-Investigativa 1.

Para esta Atividade Exploratório-Investigativa, inicialmente distribuímos alguns materiais que serviram de apoio e compreensão dos conceitos trabalhados na Atividade Exploratório-Investigativa anterior e que foram estendidos nesta Atividade Exploratório-Investigativa buscando um conceito mais formal.

Dentre os materiais, disponibilizamos alguns, pertencentes ao Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), dentre eles, os sólidos produzidos com materiais recicláveis para auxiliar o trabalho na sala de aula ou produzidos com outros materiais e também livros didáticos de ensino fundamental e médio, que fazem parte do acervo do laboratório (Figura 25).

Figura 25: Conjunto de materiais para exploração do LEM

Alguns livros de ensino superior de Cálculo, de Geometria e dicionários de Língua Portuguesa e de Matemática também estavam disponíveis para consulta, os quais abordavam o conceito de sólido, superfície e volume, dentre outros. Como também o tutorial desenvolvido por nós, referente ao *software* que nós trabalharíamos em outro momento, o qual foi desenvolvido contemplando também conceitos matemáticos.

O trabalho desenvolvido permitiu que os cinco alunos presentes pudessem novamente discutir os conceitos juntos, para que um auxiliasse o outro e elaborassem conceitos formais e retirando algumas dúvidas.

Desta forma, os alunos E, J e N continuaram com a formação de um trio e os alunos G e C uma dupla. Eles sentaram-se em 5 carteiras que estavam organizadas com o trio em frente a dupla. Por estarem discutindo juntos todas as questões, notamos que as descrições nas folhas entregues com as respostas da Atividade Exploratório-Investigativa foram bem semelhantes, consistindo até de algumas respostas idênticas.

Depois que os alunos pesquisaram alguns conceitos geométricos nos materiais, distribuímos uma folha para cada aluno, com as questões da segunda Atividade Exploratório-Investigativa, sendo: 2.1.) Qual o conceito de superfície? 2.2.) Uma superfície é representada em que dimensões conhecidas? 1D, 2D, 3D,... 2.3) Tendo respondido a Questão 1, o que vocês podem inferir sobre plano e sólido? 2.4.) Quais os tipos de superfícies que encontramos, a nosso redor, no nosso ambiente? Qual a diferença dos tipos de superfície que estudamos na escola e aquelas que vivenciamos e/ou manipulamos diariamente? Dêem exemplos. 2.5.) O que representa um sólido? 2.6.) Qual o conceito de volume? 2.7.) Qual a relação entre o sólido e o volume? 2.8.) Recordando o conceito dado na Questão 1, sobre superfície, para vocês o que representa a superfície em um sólido? 2.9.) O que são superfícies de revolução? Quais suas características principais? Vocês poderiam citar elementos comuns em todas elas? (como eixo, curva, direção de rotação)

4.4.3. Atividade Exploratório-Investigativa 3

Como está representada no Anexo 4, a Atividade Exploratório-Investigativa 3 teve como objetivos: *Investigar a capacidade de justificação do aluno; Analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; Investigar e a analisar os conhecimentos matemáticos presentes e desenvolvidos pelo contato e interação entre os alunos na atividade (1); Investigar a capacidade e visualização 2D e 3D dos alunos dados os materiais utilizados.*

Após as Atividades Exploratório-Investigativas I e II, nossa proposta neste momento constituiu-se outras Atividades Exploratório-Investigativas que investigassem como os alunos aplicam os conceitos apreendidos e discutidos, em representações presentes em pinturas, esculturas e na arquitetura. Esse contato com as obras artísticas deu oportunidade aos de representá-las no *software* e no material manipulativo, quando possível.

Buscando perceber como os alunos relacionavam as reproduções de obras de arte encontradas na internet, solicitamos que eles definissem aquelas que representavam superfícies ou sólidos, e deveriam também delimitar os sólidos de revolução e procurar encontrar uma medida aproximada das áreas e os volumes de cada objeto.

Nesta Atividade Exploratório-Investigativa, os alunos continuaram a organização em duas duplas[30] e puderam trabalhar cada dupla em um computador que permitia o acesso a internet e a utilização do *software* K3DSurf para representação de objetos tridimensionais. Os materiais como cartolina, tesoura, cola e sólidos manipuláveis do LEM também estiveram disponíveis para o uso.

As questões da terceira Atividade Exploratório-Investigativa, foram:

3.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos nos sites:

http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#;

http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/;

[30] A partir desse momento, trabalhamos com quatro alunos, pois o Aluno C ausentou-se das demais Atividades Exploratório-Investigativas que se seguiram.

http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx;

http://www.museeorsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html;

http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR;

Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet. 3.2.) Representem esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no *software*. O que vocês consideram que acontece de diferente entre essas diferentes mídias? Quais as vantagens e desvantagens vocês consideram pela visualização em cada mídia? 3.3.) Essas representações que vocês escolheram se caracteriza como superfícies ou sólidos de revolução? 3.4.) Identifiquem superfícies de revolução presentes nas figuras escolhidas. O que vocês podem perceber nessas figuras fora do papel? 3.5.) Vocês poderiam calcular a área dessas superfícies supondo alguns valores? Quais os elementos necessários para o cálculo em cada uma delas?

4.4.4. Atividades Exploratório-Investigativas 4 e 5

Prosseguindo as Atividades Exploratório-Investigativas (ANEXO 5 e ANEXO 6) nossa proposta objetivou: *Investigar a capacidade de justificação do aluno; Analisar os caminhos e estratégias seguidos pelos alunos; Investigar a capacidade de visualização frente ao problema; Investigar a capacidade de propor estratégias de resolução dos problemas apresentados.*

Os alunos receberam questões no qual pedíamos a identificação de sólidos de revolução e proporíamos estratégias nos quais os alunos pudessem desenvolver maneiras para calcular a área da superfície de revolução e o volume desses sólidos.

As questões elaboradas para a Atividade Exploratório-Investigativa quatro foram: 4.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos de revolução nos sites:

http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#;

http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/;

http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx;

http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html;

http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR.

Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet. 4.2.) Vocês poderiam representá-las com material concreto? De que modo? 4.3.) Vocês poderiam representá-las no *software*? De que modo? 4.4.) Como vocês poderiam calcular a área das superfícies de revolução? Encontre elementos que geraram as superfícies de revolução. Qual a área aproximada de cada figura? Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular a área de superfícies? 4.5.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução? Encontre elementos que geraram os sólidos de revolução. Qual o volume aproximado de cada sólido? Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos? Será que vocês poderiam utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

A Atividade Exploratório-Investigativa cinco apresentava questões, tais como: 5.) Identifiquem algumas obras famosas de Leonardo da Vinci e Michelângelo, nos sites:

Michelangelo:

http://revistaepoca.globo.com/Epoca/0,6993,EPT731774-1661-1,00.html;

http://www.pintoresfamosos.com.br/?pg=michelangelo.

Leonardo da Vinci:

http://www.universia.com.br/especiais/davinci/,

http://www.tg3.com.br/leonardo-da-vinci/.

5.1) Vocês poderiam identificar alguma superfície e sólido de revolução nas obras desses dois Artistas Famosos –Leonardo da Vinci e Michelangelo? Explicitem as suas idéias? 5.2.) Vocês poderiam representá-las no *software*? De que modo? 5.3.) Como vocês poderiam calcular a área dessas superfícies de revolução? Encontrem elementos que geraram as superfícies de revolução. Qual a área aproximada de cada figura? Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular a área de superfícies? 5.4.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução? Encontrem elementos que geraram os sólidos de revolução. Qual o volume aproximado de cada sólido? Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos? Será que vocês poderiam utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

Estas Atividades Exploratório-Investigativas não consistiram em um trabalho simples. Muitas ações, dentre os quais questões, dúvidas e propostas surgiram durante o desenvolvimento desse trabalho. Esse material constituído, que compõe nossos dados de pesquisa, juntamente com outras fontes metodológicas, será analisado com base em alguns pontos da Teoria Semiótica.

4.4.5. Atividade Exploratório-Investigativa 6

Em nosso último momento com os alunos, procuramos: *Investigar o conhecimento de superfície e sólidos de revolução; Analisar os caminhos e estratégias escolhidos pelos alunos; Investigar a capacidade de propor novos problemas e possíveis estratégias de soluções; Investigar os aspectos relacionados à Metodologia de Projetos* por meio da seguinte questão: Se vocês fossem ensinar esses conceitos de Cálculo Diferencial e Integral para os seus alunos ou mesmo para os seus colegas, como vocês elaborariam um Projeto – Plano de Aula com as imagens escolhidas por vocês?

Nesta Atividade Exploratório-Investigativa (ANEXO 7), os alunos elaboraram seu próprio plano de aula, utilizando os conhecimentos desenvolvidos durante a trajetória acadêmica e o trabalho que estivemos envolvidos durante algumas semanas.

Pudemos perceber como os alunos apropriaram e vivenciaram as experiências com as Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas, sendo que alguns processos foram utilizados por eles e outros não, chamando uma atenção maior para o modo como os alunos incluíram a utilização do *software* e a proposta da visualização e da representação.

5. ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

> *Não é usar a regra que resolve o problema; é pensar sobre o problema que promove a aprendizagem.* (PAPERT, 1994)

O presente capítulo corresponde à Análise dos Dados da pesquisa, o qual aborda um diálogo dos dados constituídos com as referências teóricas utilizadas, por meio de explicitação de alguns excertos qualitativos retirados das seis Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas junto aos participantes da pesquisa.

Fundamentalmente, antes de iniciarmos nossa análise, retomamos alguns procedimentos no que se refere à metodologia utilizada na presente pesquisa, explicitando alguns elementos de nossa trajetória. Assim, temos que em um primeiro momento – no ano de 2008 - realizamos a observação do conteúdo apresentado nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) I, do desenvolvimento dos alunos diante dessa metodologia de ensino e da utilização de representações na exposição do conteúdo e na resolução dos exercícios. Para isso, fez-se necessário a presença da pesquisadora durante um semestre letivo na sala de aula na qual a disciplina foi ministrada.

O objetivo dessa observação consistiu em entender como o conteúdo era exposto pela professora, e como os alunos buscavam assimilá-lo, focando, principalmente, como a representação e a visualização estavam presentes nesse processo.

Em um segundo momento – no ano de 2009 – foram realizadas entrevistas com os sujeitos da pesquisa – Alunos da turma referida anteriormente que se propuseram a participar da pesquisa – os quais desenvolveram, nos momentos posteriores, Atividades Exploratório-Investigativas com obras artísticas, objetos manipuláveis e o *software* K3DSurf.

Com tais Entrevistas buscamos conhecer um pouco mais dos Alunos envolvidos nas Atividades Exploratório-Investigativas, percebendo sua motivação ao iniciar um curso de Matemática e a importância que davam ao conteúdo de CDI. Além disso, buscamos compreender o conhecimento matemático que os estudantes apresentavam sobre o conteúdo de Sólidos de Revolução, como utilizavam a tecnologia na aprendizagem de conceitos matemáticos e quais os recursos empregados nos estudos das disciplinas que cursavam, tais como livros didáticos e *softwares*. Para nós, importava saber as disciplinas com as quais os Alunos se identificaram ou não, e buscar compreender os motivos pelos quais eles relatavam ter esses sentimentos. Buscamos, ainda, compreender o conhecimento que eles possuíam quanto às representações algébricas, geométricas e aritméticas, dos conceitos de CDI.

As seis Atividades Exploratório-Investigativas que aplicamos estão intituladas: “Noções e conceitos sobre superfície e volume conhecidas pelo aluno”, “Noções e conceitos formais sobre superfície e volume”, “Visualização com objetos manipuláveis e com software”, “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução”, “Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Pintores Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo” e “Ensinando conceitos de superfície e sólido de revolução”.

A Atividade Exploratório-Investigativa 1 (ANEXO 2) - “Noções e conceitos sobre superfície e volume conhecidas pelo aluno” – teve como objetivo *investigar as possíveis interrelações sobre as noções e conceitos de superfície, sólido e volume dos alunos* e, propôs as seguintes questões: 1.1.) Escrevam, com suas palavras, o que vocês pensam sobre **superfície**. Vocês podem acrescentar exemplos para ilustrar seu conceito. 1.2.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **sólido**. 1.3.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **volume**. 1.4.) Vocês acham que existe uma relação entre **superfície e sólido**? Qual seria? 1.5.) Vocês acham que existe uma relação entre **volume e sólido**? Qual seria?

A Atividade Exploratório-Investigativa 2 (ANEXO 3) - “Noções e conceitos formais sobre superfície e volume” – objetivou *investigar a capacidade de justificação do aluno; analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; analisar o conhecimento de conceitos básicos da Geometria (conhecimento matemático); e investigar a capacidade de generalização do aluno,* e, desta forma, compreendia as questões: 2.1.) Qual o conceito de superfície? 2.2.) Uma superfície é representada em que dimensões conhecidas? 1D, 2D, 3D,... 2.3) Tendo respondido a Questão 1, o que vocês podem inferir sobre plano e sólido? 2.4.) Quais os tipos de superfícies que encontramos, a nosso redor, no nosso ambiente? Qual a diferença dos tipos de superfície que estudamos na escola e aquelas que vivenciamos e/ou manipulamos diariamente? Dêem exemplos. 2.5.) O que representa um sólido? 2.6.) Qual o conceito de volume? 2.7.) Qual a relação entre o sólido e o volume? 2.8.) Recordando o conceito dado na Questão 1, sobre superfície, para vocês o que representa a superfície em um sólido? 2.9.) O que são superfícies de revolução? Quais suas características principais? Vocês poderiam citar elementos comuns em todas elas? (como eixo, curva, direção de rotação)

Com a Atividade Exploratório-Investigativa 3 (ANEXO 4) - “Visualização com objetos manipuláveis e com software” – foi possível *investigar a capacidade de justificação do aluno; analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; investigar e a analisar os conhecimentos matemáticos presentes e desenvolvidos pelo contato e interação entre os alunos na atividade (1); investigar a capacidade e visualização 2D e 3D dos alunos dados os materiais utilizados* por meio das questões: 3.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos nos sites:

http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#;

http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/;

http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx;

http://www.museeorsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html;

http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR;

Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet. 3.2.) Representem esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no *software*. O que vocês consideram que acontece de diferente entre essas diferentes mídias? Quais as vantagens e desvantagens vocês consideram pela visualização em cada mídia? 3.3.) Essas representações que vocês escolheram se caracteriza como superfícies ou sólidos de revolução? 3.4.) Identifiquem superfícies de revolução presentes nas figuras escolhidas. O que vocês podem perceber nessas figuras fora do papel? 3.5.) Vocês poderiam calcular a área dessas superfícies supondo alguns valores? Quais os elementos necessários para o cálculo em cada uma delas?

Nas Atividades Exploratório-Investigativas 4 e 5 (ANEXOS 5 e 6) - “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução” e “Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Pintores Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo” nos propusemos *investigar a capacidade de justificação dos alunos; analisar os caminhos e estratégias seguidos pelos alunos; investigar a capacidade de visualização frente ao problema; investigar a capacidade de propor estratégias de resolução* *dos problemas apresentados.* Na Atividade Exploratório-Investigativa 4, elaboramos as questões: 4.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos de revolução nos sites:

http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#;

http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/;

http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx; http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html;

http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR.

Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet. 4.2.) Vocês poderiam representá-las com material concreto? De que modo? 4.3.) Vocês poderiam representá-las no *software*? De que modo? 4.4.) Como vocês poderiam calcular a área das superfícies de revolução? Encontrem elementos que geraram as superfícies de revolução. Qual a área aproximada de cada figura? Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma fórmula geral para calcular a área de superfícies? 4.5.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução? Encontrem elementos que geraram os sólidos de revolução. Qual o volume aproximado de cada sólido? Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos? Será que poderíamos utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

A Atividade Exploratório-Investigativa 5 propôs as questões: 5.) Identifiquem algumas obras famosas de Leonardo da Vinci e Michelângelo, nos sites:

http://revistaepoca.globo.com/Epoca/0,6993,EPT731774-1661-1,00.html;

http://www.pintoresfamosos.com.br/?pg=michelangelo.

http://www.universia.com.br/especiais/davinci/, http://www.tg3.com.br/leonardo-da-vinci/.

5.1) Vocês poderiam identificar alguma superfície e sólido de revolução nas obras desses dois Artistas Famosos –Leonardo da Vinci e Michelangelo? Explicitem as suas idéias? 5.2.) Vocês poderiam representá-las no *software*? De que modo? 5.3.) Como vocês poderiam calcular a área dessas superfícies de revolução? Encontrem elementos que geraram as superfícies de revolução. Qual a área aproximada de cada figura? Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma fórmula geral para calcular a área de superfícies? 5.4.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução?

Encontrem elementos que geraram os sólidos de revolução. Qual o volume aproximado de cada sólido? Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real? E se vocês dividissem em n partes? Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos? Será que poderíamos utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

A última Atividade Exploratório-Investigativa (ANEXO 7) aplicada - "Ensinando conceitos de superfície e sólido de revolução" – teve como objetivo i*nvestigar o conhecimento de superfície e sólidos de revolução; analisar os caminhos e estratégias escolhidos pelos alunos; investigar a capacidade de propor novos problemas e possíveis estratégias de soluções; investigar os aspectos relacionados à Metodologia de Projetos* abrangendo uma única questão: 6.1) Se vocês fossem ensinar esses conceitos de Cálculo Diferencial e Integral para os seus alunos ou mesmo para os seus colegas, como vocês elaborariam um Projeto – Plano de Aula com as imagens escolhidas por vocês?

Essas Atividades Exploratório-Investigativas, de modo sintético, buscaram desenvolver as noções e os conceitos de sólidos e superfícies dos Alunos, os caminhos e as estratégias abordados por eles durante atividades de visualização e representação dos conceitos matemáticos, e a capacidade dos sujeitos da pesquisa – quatro Alunos do segundo ano do curso de Matemática da UNESP/ Rio Claro – para resolver e/ou responder as questões. Eles eram orientados a procurar reproduções de obras artísticas nos sites[31] da Internet, em que alguns deles eram sugeridos pela pesquisadora. Os estudantes poderiam consultar os sólidos manipuláveis e lidar com a cartolina para a montagem de outros sólidos, como também utilizar o *software* K3DSurf para representação e visualização de funções matemáticas, relacionadas às obras artísticas.

Assim, desses momentos de interação, buscamos selecionar alguns excertos que relacionam os dados obtidos na pesquisa, os quais nos permitem analisá-los por meio de alguns pontos da perspectiva da Semiótica (PEIRCE, 2008), com as possíveis interrelações entre a visualização e a representação dos conceitos matemáticos, desenvolvidos em CDI I.

Como explicitamos anteriormente, os conhecimentos em CDI I que acompanhamos nessa pesquisa estão focados no conteúdo sobre Sólidos de Revolução. Pelo site da Internet –

[31]http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#; http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/; http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx; http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html; http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR; http://revistaepoca.globo.com/Epoca/0,6993,EPT731774-1661-1,00.html; http://www.pintoresfamosos.com.br/?pg=michelangelo;http://www.universia.com.br/especiais/davinci/; http://www.tg3.com.br/leonardo-da-vinci/

O MOVIMENTO[32] – podemos compreender que alguns movimentos de figuras e formas da natureza geram, no espaço, corpos (sólidos). Esses sólidos podem ser, por exemplo, aqueles formados a partir do movimento completo de uma figura invariável em torno de um eixo. Esse movimento particular recebe o nome de revolução e os sólidos por ele gerados são chamados sólidos de revolução, que estão presentes de inúmeras maneiras em nossa vida cotidiana.

> O cilindro é a forma mais comum de um recipiente simples. Outra forma comum é o cone. Há bons exemplos também na arquitetura: uma igreja românica tem o campanário cilíndrico. Os telhados de algumas torres e campanários têm a forma de um cone. A esfera é a figura espacial mais regular e fácil de imaginar. A forma semi-esférica é usada em arquitetura, nas cúpulas das igrejas e, também, em alguns recipientes, como o interior de uma fonte. Os corpos de revolução [Sólidos de Revolução] são figuras espaciais que encontramos representadas em muitos objetos de nosso dia-a-dia[33](O MOVIMENTO, 2009, p. 1).

No desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, sugerimos que os Alunos desenvolvessem diferentes modos e/ou estratégias para calcular a área das superfícies de revolução e o volume dos sólidos de revolução, decorrentes da interação com as reproduções de obras de arte selecionadas pelos próprios alunos por meio dos sites disponibilizados pela pesquisadora, do trabalho desses alunos com o *software* K3DSurf, e das atividades investigativas que eles desenvolveram nesta pesquisa.

Como indicamos anteriormente, a compreensão dos processos desenvolvidos nesse contexto metodológico - por meio dos momentos de observação, entrevistas e atividades - focados na visualização e na representação, se realiza por meio de teorias que abordam questões relacionadas a este tema, explicitadas, principalmente, por Peirce (2008), como também outros autores e pesquisadores da área, como, Piaget e Inhelder (1993), Fischbein (1993), Gutiérrez (1996), Pais (1994).

O caminho que percorremos, em primeiro lugar, foi retomar o desenvolvimento das atividades pelos Alunos participantes a fim de contemplar as dimensões implícitas ao processo de visualização e de representação dos conceitos matemáticos. Nessa fase do processo da pesquisa, por meio da teoria Semiótica, procuramos **ressaltar alguns fenômenos**

---

[32] O MOVIMENTO e seus Produtos. Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/trabalho_winplot/solidosderevolucao.htm>. Acesso em 29 de nov. de 2009.

[33] O MOVIMENTO e seus Produtos. Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/trabalho_winplot/solidosderevolucao.htm>. Acesso em 29 de nov. de 2009.

que sobressaem ao conjunto de dados constituídos durante a pesquisa realizada junto aos Alunos. Esses fenômenos são explicitados dos excertos qualitativos.

A **observação desses fenômenos**, o qual se caracteriza por um segundo momento, permite relacionarmos os excertos qualitativos ao nosso objetivo de pesquisa, buscando *compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em CDI, no contexto das TIC*. Consideramos que este momento constitui-se em um olhar para os fenômenos, procurando neles as qualidades que fazem parte ao contexto da nossa pesquisa.

A partir desse processo, em nosso terceiro momento, buscamos **extrair elementos particulares**, que correspondem à nossa questão diretriz, dada por: *Quais são as dimensões implícitas nos processos de visualização e de representação de conceitos de CDI, no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC)*?

Com o conhecimento da teoria Semiótica temos “uma espécie de visor ou lente de aumento que nos permite perceber uma multiplicidade de pontos e distinguir sutis diferenciações nas linguagens concretas pelas quais estamos passando e com as quais convivemos.” (SANTAELLA, 2007, p. 57) Este então, segundo Peirce (2008), corresponde ao momento em que são distinguidos os signos, os quais estão presentes neste processo. Isso significa encontrar elementos que podem ser interpretados de maneiras diferentes e permitir *compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em CDI, no contexto das TIC***.**

Iniciando uma discussão, fazemos menção aos processos de visualização e de representação de conceitos extraídos a partir do momento em que tivemos contato com os dados constituídos nessa pesquisa. Eles caracterizam-se pelos aspectos referentes aos *processos de exploração e percepção dos entes geométricos*; *processos de visualização dos entes geométricos; processos de representação dos entes geométricos*; e *processos de re-significação dos conceitos algébricos*.

Na Figura 26, elaboramos uma tabela que busca relacionar os aspectos que extraímos dos dados constituídos pelas seis Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas nessa pesquisa. Assim, fizemos um cruzamento entre o resultado das Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas pelos Alunos participantes da pesquisa (ATIVIDADES), e os aspectos que consideramos estarem envolvidos nesse processo de visualização e de representação dos conceitos matemáticos pelos Alunos participantes da pesquisa (CATEGORIAS). Podemos notar ainda na Figura 26, que uma Atividade Exploratório-Investigativa pode estar associada a mais de uma Categoria, e as Categorias podem conter mais de uma Atividade Exploratório-Investigativa.

ATIVIDADES / CATEGORIAS	1	2	3	4	5	6
Processos de exploração e percepção dos entes geométricos	x	x				
Processos de visualização dos entes geométricos			x	x	x	x
Processos de representação dos entes geométricos			x	x		x
Processos de re-significação dos conceitos algébricos			x	x	x	x

Figura 26: Relação entre Categorias de Análise e Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas na pesquisa

Ressaltamos que alguns pontos destacados nas Entrevistas e nas Observações da turma nas aulas de CDI, que foram considerados vinculados ao desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, são indicados durante a Análise dos dados constituídos. Desta maneira, podemos compreender alguns posicionamentos, respostas ou direcionamentos dados pelos Alunos durantes o desenvolvimento das referidas atividades, de modo paralelo às relações abordadas pela teoria.

Desta forma, passamos a explicitar cada um desses aspectos - denominados também por Categorias - emergidos pelo arranjo dos dados constituídos na presente pesquisa, buscando relacioná-las ao domínio teórico da Visualização e da Representação, segundo alguns pontos da teoria Semiótica.

5.1. PROCESSOS DE EXPLORAÇÃO E PERCEPÇÃO DOS ENTES GEOMÉTRICOS

A importância que compreendemos dessa discussão e apresentação, por parte dos Alunos participantes da pesquisa, caracteriza-se pelo entendimento deles sobre cada um dos conceitos geométricos envolvidos nas Atividades Exploratório-Investigativas, objetivando o desenvolvimento de conceitos em CDI I, que se apresentam no desenvolvimento inicial das demais Atividades Exploratório-Investigativas. As respostas encontradas nas Atividades Exploratório-Investigativas três, quatro, cinco, intituladas: “Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*", "Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução" e "Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo", respectivamente, indicam, entre outros aspectos, a importância do conhecimento de conceitos geométricos para o desenvolvimento de conceitos em CDI I.

Desta forma, compreendemos que os conceitos geométricos foram os primeiros trabalhados no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas – conhecimentos sobre os conceitos de Superfície, Sólidos, Área e Volume - para, posteriormente, abrangermos questões de desenvolvimento dos conceitos em CDI I, especificamente os cálculos de área da superfície dos Sólidos de Revolução e de volume dos Sólidos de Revolução.

Apresentamos nesse momento, um exemplo tal como "calcular o volume de um cone, por meio do conceito de Integral". Para desenvolver a situação dada nesse exemplo, devemos saber o que significa o volume deste sólido, para então sabermos que elementos do sólido utilizaremos nos cálculos algébrico e aritméticos. Desta forma, nas Atividades Exploratório-Investigativas desta pesquisa, abordamos o conceito de volume, entre outros. Nos momentos que se seguem em nosso trabalho, temos na Atividade Exploratório-Investigativa 4, por exemplo, as seguintes questões: "Como vocês poderiam calcular a área das superfícies de revolução? Ou "Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução?", o que necessita de conhecimentos geométricos explicitados.

Sabemos que esses conhecimentos geométricos não são apresentados nas aulas de CDI I, pois os professores entram na sala de aula considerando que os Alunos já os sabem. Porém, esses conceitos mostram-se como idéias básicas para a compreensão das questões que são abordadas no decorrer dessa disciplina, como Bean (2004, p.170) explora em seu trabalho, no contato com os alunos da disciplina de CDI. O autor ressalta a importância do professor em construir uma aula compreensível aos alunos e abordar alguns aspectos sobre a necessidade do professor de desenvolver uma empatia com esses alunos sobre o conhecimento matemático e as habilidades que eles apresentam.

Assim, o professor não deve estar apenas preocupado em ensinar os conceitos de CDI, mas também, estar atento ao conhecimento do aluno que está presente em sua aula. Isso significa "levar em consideração a heterogeneidade da turma" (BEAN, 2004, p. 171), tanto no conteúdo ministrado, quanto nos conhecimentos de conteúdo anteriores que são requeridos no momento específico.

Portanto, a análise desse nível de discussão abrangendo as Atividades Exploratório-Investigativas 1 e 2, intituladas: "Noções e conceitos sobre superfície e volume conhecidas pelo Aluno" e "Noções e conceitos formais sobre superfície e volume" são fundamentais na proposta de pesquisa.

Iniciamos nossa **Atividade Exploratório-Investigativa 1**, representada pela Figura 27, buscando *investigar as possíveis interrelações sobre as noções e conceitos de superfície, sólido e volume dos* Alunos. O trabalho com os cinco Alunos do segundo ano do curso Superior em Matemática abre uma discussão sobre os conceitos geométricos: Superfície, Sólido e Volume.

Figura 27: Momento de desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas com a pesquisadora

Nessa Atividade Exploratório-Investigativa inicial, permitimos que os cinco Alunos[34] presentes pudessem discutir os conceitos juntos, almejando que um auxiliasse o outro. Propusemos também que eles se dividissem em grupos – um trio e uma dupla – para responder as questões propostas pela pesquisadora. Dessa forma, os Alunos E, J e N formaram um trio e os Alunos G e C formaram uma dupla e sentaram-se em cinco carteiras que estavam organizadas com o trio em frente à dupla. Por estarem discutindo juntos todas as questões, notamos que as descrições nas folhas entregues com as respostas da Atividade Exploratório-Investigativa foram bem semelhantes, consistindo até de algumas respostas idênticas.

[34] Os Alunos participantes da pesquisa serão referidos por Aluno G, Aluno N, Aluno E, Aluno J e Aluno C. O Aluno C esteve presente nas Atividades Exploratório-Investigativas 1 e 2, porém não participou da entrevista nem das demais Atividades Exploratório-Investigativas por conta da incompatibilidade de horários com os outros Alunos. Portanto, apenas relataremos o Aluno C, o qual também cursa o segundo ano do curso de Matemática, nesse momento.

Durante a narração dessa Atividade Exploratório-Investigativa, ressaltamos que estiveram presentes dois momentos distintos: uma discussão dos conceitos pelos Alunos e, posteriormente, uma discussão desses mesmos conceitos com a pesquisadora.

Os Alunos, então, iniciaram a primeira questão *"Escreva, com suas palavras, o que vocês pensam sobre* ***superfície****. Você pode acrescentar exemplos para ilustrar seu conceito."*, Na discussão feita por eles, acerca desta questão o primeiro relato foi feito por um Aluno que disse que superfície é "uma folha". Em seguida, outro Aluno ressaltou que poderia ser conceituado como um cilindro, e um terceiro Aluno explicitou que: "É tudo". Desse conceito correspondente a "tudo", todos pareceram concordar.

Com uma folha de papel, o Aluno C formou um cilindro e fez alguns gestos como se algo em volta da folha representasse a superfície do sólido (Figura 28 e Figura 29).

Figura 28: Superfície do cilindro representado pela folha

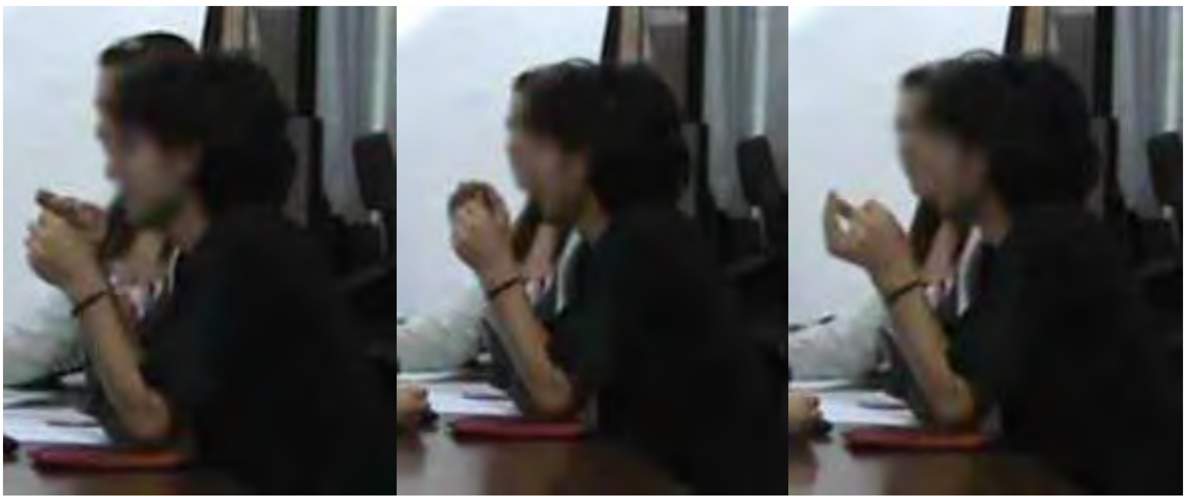


Figura 29: Superfície do cilindro representado por gestos

Ele pronunciou o que, nós, pesquisadoras consideramos ser, para ele, um conceito informal de superfície. O Aluno C concluiu e questionou: “Superfície não é a pele de alguma coisa?” Os outros Alunos viram de forma descontraída, com risos, essa definição dada pelo Aluno C, mas pareceram entender o que ele queria definir.

Notamos que o conceito de cilindro, exposto nesse momento de descrição da Atividade Exploratório-Investigativa 1, permaneceu nos demais exemplos que se seguiram. Os sólidos, destacando o cilindro, passaram a ser os únicos exemplos de superfície citados pelos Alunos. Será que podemos pensar em outros tipos de Superfícies e conceituá-las de maneira diferente do que foi feito pelos Alunos da pesquisa?

Porém, ao invés de estarem dispostos a discutir sobre o conceito de Superfície, o grupo mostrou que existe uma maior preocupação em responder a folha de respostas[35] disponibilizadas pela pesquisadora, na qual foi solicitado a eles que colocassem todos os conceitos pensados pelo grupo.

Na folha de respostas, os Alunos procuraram encontrar as palavras para conceituar Superfície. Assim, o trio formado pelos Alunos E, C e G e a dupla de Alunos J e N descreveram de modo sucinto, ditado pelos Alunos N e J, que “a superfície é o que envolve um sólido, como por exemplo: superfície esférica” e como podemos notar, acrescentaram um esboço (Figura 30) para amparar essa conceituação.

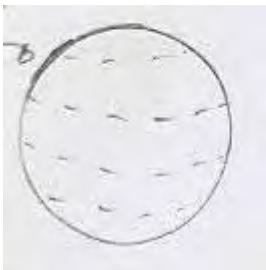


Figura 30: Esboço da superfície pelo Alunos G e C

Na segunda questão, perguntamos *“_Como feito na questão 1, escreva, com suas palavras, o que vocês entendem por* ***sólido****.”* Os Alunos acordaram que o sólido seria o que “está dentro”.

O Aluno N definiu que sólido “é o interior da superfície”. O Aluno E, então, ressaltou que na questão 3, da Atividade Exploratório-Investigativa 1, perguntou-se o que é volume. Para nós, essa situação apresenta-se como uma dúvida do Aluno quanto ao conceito de sólido e de volume. Percebemos então, que para ele, o que estava sendo definido naquele momento pelos colegas poderia ser também o conceito de volume, e nesse caso, eles deveriam explicitar

[35] Folha de papel A4, destinada aos Alunos, que deveriam escrever as respostas para as questões dadas.

melhor cada uma dessas definições. Nesse momento, a dúvida de um Aluno tornou-se uma dúvida para todos no grupo que, ao definirem Sólido, procuraram diferenciar esse elemento do volume em si.

Todo o grupo notou então, que a definição de Sólido explicitada por eles poderia não estar correta e, assim, ao invés de escreverem suas considerações acerca desse conceito, abriram novos questionamentos e discussões sobre a diferença conceitual entre Superfície e Volume.

Aluno C: Então não podemos dizer que é só o interior?

Aluno J: É, eu acho que é a união do interior com superfície.

Aluno E: É, é tudo isto.

Aluno J: Porque se for só interior, é volume.

Os outros Alunos concordam balançando a cabeça.

Aluno J: Então vamos colocar isso...

Ao final dessa questão, o trio de Alunos E, C e G concordou em definir Sólido, como: "a união da superfície com o seu interior, como por exemplo: esfera". A dupla formada pelos Alunos N e J também concordou, definiu e representou um sólido (Figura 31) como sendo "o conjunto formado pela superfície e o seu interior."

Figura 31: Representação da superfície com o seu interior pelos Alunos G e C

Na terceira questão, tem-se: *"Como feito na questão 1, escreva, com suas palavras, o que vocês entendem por* ***volume****."* Durante as conversas, o Aluno N ressaltou que o volume referia-se à medida. Os Alunos abriram, então, uma discussão para definir se o volume "é a medida do que está dentro da superfície" ou "a medida do sólido", segundo suas próprias expressões.

Para definir o conceito de volume, os Alunos incluíram, nesse momento da interação, o conceito de Área, o qual não foi pedido na questão 3, nem em outra questão da Atividade Exploratório-Investigativa 1. Assim, o Aluno E prontamente tentou definir área como a "medida da superfície". Acreditamos que esse Aluno objetivou relacionar o conceito de volume como sendo a medida do sólido e a área como sendo a medida da superfície. A princípio, pareceu que todos concordaram com a definição do Aluno E, pois não demonstraram nenhuma objeção ao conceito explicitado.

Para definição desse conceito, os Alunos buscaram relacioná-lo com os sólidos conhecidos. A pesquisadora permitiu que os exemplos fossem dados desde que eles não tivessem encontrado outra forma de se expressarem e considerassem que o esboço da Figura 31, ou seja, a representação do Volume facilitaria a definição do conceito. Assim, o conceito de Volume explicitado pelo trio correspondeu: “a medida do sólido, normalmente é medida pela área da base vezes a altura, um exemplo disso é um paralelepípedo, e um contra-exemplo é a esfera”. Os Alunos que formaram a dupla mencionaram um conceito similar, porém com exemplo diferenciado, do cubo, apresentando a fórmula que permite encontrar o valor do Volume “l x l x l” (Figura 32).

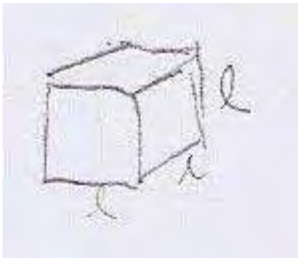


Figura 32: Representação do Cubo e das suas dimensões pelos Alunos G e C

Ao relacionar o valor do volume por “l x l x l”, entendemos que os Alunos consideram o volume como a capacidade do sólido, pois na discussão com a pesquisadora, eles não consideraram esse sólido como vazio ou cheio. Assim, após o desenvolvimento das três primeiras questões, a pesquisadora iniciou uma discussão com o grupo, argumentando sobre os conceitos definidos por eles. Os Alunos, a principio, sentiram-se um pouco receosos em falar com a pesquisadora o que eles entendem sobre superfície, sólidos e volume. Porém, à medida em que desenvolviam essa discussão, a situação ia se modificando.

Destacamos que o Aluno J pareceu ser o líder do grupo pois, como pudemos reparar, ele respondeu a maioria das questões e foi sempre a pessoa para quem o grupo olhava quando havia alguma dúvida entre eles.

Assim, quando a pesquisadora perguntou o que eles entendiam por superfície, o Aluno J pronunciou: “A gente colocou que a superfície é a área que envolve o sólido, que é o exterior.” Com o auxílio do Aluno N, eles procuraram fazer gestos com as mãos para apontar o que seria esse “exterior”, como se estivessem envolvendo uma esfera. O Aluno E, então, complementa de maneira informal que superfície seria “a bordinha” dos sólidos. (Figura 33 e Figura 34)

Figura 33: Gestos para complementar o conceito de Superfície

Figura 34: Outros gestos que complementam o conceito de Superfície

A pesquisadora solicitou que eles dessem exemplos do que estavam definindo. Os Alunos citaram apenas a superfície esférica.

“E a definição do sólido?”, indagou a pesquisadora. Respectivamente os Alunos J e G responderam que “é tudo”, “é a união da superfície com o interior dela”.

Assim, a pesquisadora colocou que: “Se eu for pegar o exemplo de uma mesa, o que seria representado pela superfície, sólido e volume numa mesa?”

“Essa parte aqui de cima seria a superfície, o que seria aqui por cima”, respondeu o Aluno C, apontando para a tampa da carteira em que estava e complementou, “Tudo aqui, a mesa inteira seria o sólido.”

Pesquisadora: “Todos concordam? Que a mesa inteira seria o sólido?”

Os Alunos J, G, N, E e C balançaram a cabeça positivamente. Entretanto, tentando aprofundar o conceito de superfície, dado que o Aluno C apenas definiu como a tampa da mesa, a pesquisadora perguntou se o pé da mesa também teria uma representação de superfície.

O Aluno G prontamente respondeu que: “tudo em volta é a superfície.” Nesse momento todos pareceram concordar, e ao serem observados pela pesquisadora, confirmaram balançando positivamente a cabeça. Assim, a pesquisadora continuou a conversa com os Alunos para que eles relatassem um pouco sobre o conceito de volume.

Ao serem questionados sobre o conceito de volume, os Alunos responderam que é “a medida do sólido”, a “medida do interior”. Para eles, a questão da medida é clara, mas em discussões posteriores, veremos algumas dúvidas quanto à medição do volume de um recipiente que seria pedido.

Persistindo na discussão sobre o conceito de volume, a pesquisadora tentou relacioná-lo ao exemplo da mesa. Para o grupo, a medida de volume é definida como sendo a medida do material que constitui mesa. Porém, essa definição foi considerada pela pesquisadora como muito abrangente, e ela optou por utilizar um outro exemplo, tal como uma esfera de isopor.

A representação de uma esfera, feita de isopor e pintada de amarelo, foi questionada pela pesquisadora aos Alunos, no que diz respeito aos conceitos de superfície, sólido e volume. Os Alunos definiram sem dúvidas que o sólido é “a esfera inteira”, a superfície é “só o amarelinho” e o volume é o “que cabe dentro” ou “o que está por dentro”. Então, para entender como os Alunos compreenderam o volume da esfera, dado que esse conceito se apresentou confuso pelo Aluno C , a pesquisadora argumentou: “E se essa bola de isopor for oca por dentro?”

O Aluno J respondeu que “ela vai continuar sendo uma superfície e também um sólido, mas o volume também vai continuar o mesmo.” Ou seja, apesar de notarmos uma incerteza na resposta do Aluno J quanto ao volume, percebemos que todos os Alunos consideraram o que cabe dentro. Contudo, ao final dessa conversa, o Aluno C disse que no cálculo do volume, “se não tiver nada dentro, você tira a parte de dentro”, mas os Alunos não se pronunciaram sobre essa observação. Apesar de não serem discutidos nesse momento os conceitos adversos sobre volume e o modo como os Alunos concluíram esta definição serão vistos na quinta questão dessa Atividade Exploratório-Investigativa.

No prosseguimento das questões, tivemos mais um momento de discussão somente entre os cinco Alunos nas Questões 4 e 5, como apresentamos em seguida.

Na quarta questão, temos: *“Vocês acham que existe uma relação entre* ***superfície e sólido****? Qual seria?”.* Nosso objetivo, nessa questão, consistiu em obter, no cenário dessa pesquisa, discussões que relacionassem os conceitos anteriormente tratados, ou seja, nossa finalidade era obter relatos dos Alunos acerca da relação que eles faziam entre os conceitos dados de forma separada nas Questões 1, 2 e 3.

Observamos que foi a partir desse momento também, que houve um envolvimento maior dos Alunos com a Atividade Exploratório-Investigativa 1 e uma confiança para prosseguirem no desenvolvimento dela.

Assim, o Aluno N iniciou a conversa com os colegas. Ele fez uma relação da superfície como condição para termos um sólido. “Se eu tenho uma superfície, por exemplo, a superfície esférica não é meio obvio que eu tenho algo por dentro?” Ele apontou em direção ao esboço da esfera feita na Questão 1 (Figura 30).

Os demais Alunos não concordaram com a explicação dada pelo Aluno N e o próprio Aluno abriu uma discussão sobre o assunto. Consideramos que ele buscou saber como seria uma superfície sem sólido, pois ele fez uma relação de que existindo uma superfície, haveria algo “por dentro” e, dessa forma, também existiria um sólido.

O Aluno J encontrou uma justificativa para discordar da definição apresentada. Para ele, todo sólido tem superfície, mas a relação contrária não seria verdadeira, ou seja, nem toda superfície definiria um sólido.

O Aluno N, desse modo, pareceu entender e concordar com o Aluno J. Nesse momento, compreendemos que todos estavam de acordo, entretanto, o Aluno E demonstrou ainda pensar sobre o assunto. Ele olhou para o armário que contem os objetos manipuláveis e buscou refletir quanto a definição em que “todo sólido contém superfície”. O Aluno E pareceu fazer perguntas em voz alta, para ele mesmo, questionando: “Porque imagina um sólido sem superfície? Tem não!”

Ninguém pareceu tecer nenhuma consideração sobre essa relação e escreveram na folha de respostas que: “todo sólido contém uma superfície”. Esse é um conceito ditado e escrito pelo Aluno N e repetido pelo Aluno G que também escreveu em sua folha de respostas.

Na quinta questão, a pesquisadora procurou entender o que os Alunos consideravam sobre a relação entre volume e sólido: *“_Vocês acham que existe uma relação entre **volume e sólido**? Qual seria?”*.

Notamos que os Alunos E, G, C, N e J continuaram investigando as relações definindo um conceito geométrico por meio de outro conceito geométrico, ou seja, sendo o volume a medida do sólido, como os Alunos J e N escreveram na folha de resposta.

O Aluno E, contudo, ao ver essa definição no papel questionou a existência de um sólido que não apresentaria uma medida de volume. Ninguém encontrou um contra-exemplo ou tentou expor alguma explicação.

“A medida, será que não é a medida do interior?”. Essa pergunta lançada pelo Aluno J retomou a dúvida que havia permanecido na terceira questão e que pareceu discordar com o conceito dado pelo Aluno J, entendido como sendo o volume a medida de todo o sólido. Porém, os cinco Alunos pareceram concordar que “o volume é tudo”, ou seja, tudo “que cabe dentro de um sólido”.

O Aluno J ficou olhando para todos, tentando entender o que seria a medida de volume. Então se iniciou uma discussão sobre o cálculo do volume como a medida interior adicionado à medida da superfície.

Essa discussão foi iniciada por meio da pergunta do Aluno G, que buscou saber como se calculava o volume da esfera. Ao receber a resposta de outro colega, que respondeu ser $4/3\pi r^3$, o Aluno G afirmou que estando cheio ou vazio o Volume da esfera só ia variar de acordo com o x, “que será o raio”.

Nessa discussão, porém, os Alunos não ficaram restritos à ideia da esfera, e incluíram o exemplo da jarra de suco. Esse momento permitiu-nos perceber a verdadeira dúvida dos Alunos quanto ao conceito de volume. Compreendemos que eles passaram a diferenciar o volume “suportado” pelo sólido e o volume contido nele, ou seja, conceito de capacidade e o conceito de volume.

Ressaltamos que em nenhum momento eles discutiram que conceito definiria “o Volume ‘suportado’ pelo sólido e o volume contido nele”, apenas tentaram encontrar qual dos dois conceitos definiria volume.

Aluno J: “Então, tem um volume lá dentro, só que esse volume é ar.”

Aluno E: “Ah... pode crer... pode ser um volume cheio ou um volume vazio.”

Aluno J: “Exatamente.”

Aluno E: “Eu acho que o volume tem, mas,... tipo,... uma jarra de suco, pode estar cheia ou vazia.”

Aluno J: “O volume que cabe em um sólido é o mesmo, agora se está preenchido de suco ou não é diferente.”

Aluno E: “ah... então acho que agora nós chegamos a uma conclusão.”

Aluno N: “Põe então que o sólido, ele sempre vai ter...”

Aluno E: “...um volume, mas só que o volume pode estar cheio...”

Aluno N: “...o volume pode variar.”

Então, sem mais discussão, os Alunos N e J escreveram na folha de respostas o conceito que, respectivamente, entenderam que trio de Alunos C, E e G e a dupla de Alunos N e J tinham chegado à conclusão.

Assim, na folha de respostas da dupla de Alunos N e J, ficou escrito que “o volume é a medida do sólido, o sólido sempre tem volume, mas esse pode variar. Ex: uma jarra com volume de 1L: ela pode estar cheia, média ou vazia, mas o volume da jarra continua sendo o mesmo.” O outro grupo de Alunos, formada pelos Alunos C, E e G, compartilhou da mesma definição, considerando que “uma jarra cilíndrica pode estar cheia de suco ou vazia, mas o volume que cabe nela é sempre o mesmo.”

O momento de discussão dessas duas últimas questões com a pesquisadora explicitou como os Alunos compreenderam tais conceitos.

Ao relacionar os conceitos de volume e sólido, o Aluno C citou o exemplo da mesa, considerando-a como um sólido. A delimitação desse sólido compreende o que chamamos por superfície. Nesse momento, o Aluno N interrompeu o Aluno C, ressaltando que “todo sólido vai ter superfície”. Ele não conseguiu imaginar um sólido sem superfície e relacionou o conceito de superfície à forma do sólido.

Outro exemplo explorado pelos Alunos foi apresentado pelo Aluno E, o qual inferimos ser a definição de sólidos de revolução. “Se você for pensar em uma função, no momento em que ela gira. O limite dela seria a função, né?” Esse Aluno, em meio à definição, fez gestos como se o dedo fosse a função girasse em torno de um eixo (Figura 35).

Figura 35: Gestos que complementam o conceito de Superfície dos Sólidos de Revolução

Dessa forma, compreendemos que os Alunos haviam entendido o conceito, mas que mesmo assim, ele não era fácil de ser abordado – como em uma explicitação desse conceito para outra pessoa ou escrevendo esse conceito em uma folha de papel.

Na relação entre volume e sólido, percebemos uma facilidade maior de expor para a pesquisadora, as idéias pensadas e os conceitos formados pelo grupo. O Aluno G declarou com segurança que "o volume é a medida do sólido, o sólido sempre tem um volume. Mas, por exemplo, uma jarra de suco, de 1 litro de volume, ela pode estar cheia, pode ter só um dedinho, mas o volume dela vai ser o mesmo".

Porém, quando acreditávamos que a discussão havia terminado, ocorreu o comentário: "O sólido, se ele for oco por dentro, ela tem a forma cilíndrica, mas é oca por dentro. Quando vai calcular a gente não tirava?" A pergunta feita pelo Aluno J, iniciou uma nova discussão sobre o assunto.

Aluno N: “Tirava.”

Aluno J: “Quando eu ia calcular eu tirava. Agora eu já fiquei em dúvida. A área da superfície, não, a gente não tirava, mas...”

Os Alunos concordaram com a pergunta/afirmativa dele, como explicitou o Aluno C: “quando eu penso em sólido, eu penso em um negócio completo e não só, vazio. Se ele estiver vazado, eu vou tirar um sólido dentro dele, a medida do menor dentro do maior.”

Porém os Alunos articularam, baseados na jarra, que mesmo a parte vazia – oca – seria a representação de um sólido também. O Aluno J, então, pareceu concordar com o conceito dado pelo grupo e não lançou novos questionamentos.

Dessa forma, percebemos que a conclusão a que os Alunos chegaram ao final, refere-se à definição de que o volume não mudaria mesmo sendo a esfera oca ou uma jarra vazia, como dado em seus exemplos.

Isso significa que, para nós, os Alunos entenderam o conceito de volume, como a capacidade do sólido. Essa discussão sobre volume teve um efeito/resultado, quando incluído o exemplo da jarra, sendo esse objeto fundamental nessa discussão e na construção e apreensão dos significados por esses Alunos participantes da pesquisa. Porém, mesmo após as discussões e observando que os Alunos entravam em acordo sobre as respostas das questões, ainda acreditamos que eles não passaram a compartilhar dos mesmos conceitos. Será mesmo que o Aluno J concordou com os outros Alunos? Como os Alunos calculariam o volume de um sólido que fosse apresentado em uma outra questão?

Como poderá ser observado nas Atividades Exploratório-Investigativas que virão em seguida, os Alunos ainda apresentaram divergências nas discussões dadas pela crença diferenciada nesses conceitos básicos de geometria, discutidos nesta Atividade Exploratório-Investigativa.

A **Atividade Exploratório-Investigativa 2** iniciou-se com os sujeitos da pesquisa consultando o material que foi disponibilizado pela pesquisadora. Esse material consistia aos livros didáticos de ensino fundamental e superior, apostilas e dicionários que abordam o conteúdo matemático e conceituam expressões matemáticas. Durante 15 minutos, os Alunos puderam pesquisar o material, e já durante esse período, eles começaram a interagir uns com os outros, conversando sobre alguns conceitos geométricos trabalhados na Atividade Exploratório-Investigativa anterior, tais como: sólido, volume, superfície.

O Aluno E foi o primeiro a se pronunciar perante o grupo durante a Atividade Exploratório-Investigativa. Ainda nesses momentos iniciais de pesquisa, disse ter encontrado uma definição “muito boa” sobre superfície de revolução no livro de cálculo do Anton (2000), porém sem pronunciar tal definição. Nenhum dos Alunos procurou saber o conceito que o Aluno havia encontrado e todos continuaram em suas pesquisas individuais.

O Aluno N iniciou a leitura para o grupo sobre a definição de volume do corpo dado por Cardoso (2007), na qual acreditamos que apenas o Aluno J tenha prestado atenção.

> O volume de um corpo é o espaço ocupado pelo referido corpo. A unidade utilizada nos cálculos do volume são as unidades cúbicas.
> Todos esses corpos estarão no espaço tridimensional.
> O volume pode ser gerado por uma figura e um eixo de revolução situados em um mesmo plano, de modo que o eixo não atravesse a figura nem lhe seja perpendicular. Nesse caso dizemos ser um sólido de revolução. (CARDOSO, 2007, p. 475).

Então o Aluno E, que havia se pronunciado anteriormente, retornou ao material que estava pesquisando e também leu o conceito encontrado para superfície de revolução:

> Uma superfície de revolução é aquela gerada fazendo girar uma curva plana em tono de um eixo, no mesmo plano da curva. [a expressão do Aluno nesse momento era de alguém que não tinha entendido o conceito, então ele continuou lendo-o] Por exemplo, a superfície de uma esfera pode ser gerada fazendo girar um semicírculo, em torno do seu diâmetro, e a superfície lateral de um cilindro circular reto pode ser gerada fazendo girar um segmento de reta, em torno do eixo paralelo a ele. (ANTON, 2000, p. 471)

O Aluno G, tendo encontrado uma definição para superfície, disse: “ó, achei outro. Superfície é a figura geométrica gerada por uma linha (G) que se desloca no espaço, podendo manter-se invariável ou não em forma de grandeza, segundo uma lei determinada.” Esse trecho foi tirado do texto de Cardoso (2007, p. 430) sobre conceito de superfície. Todo o grupo prestou atenção na leitura, mas eles pareceram não entender o conceito apresentado. Então, o Aluno E concluiu, com base em outro livro que “a superfície de revolução é uma curva gerada em torno de um eixo”.

Após explicitarem um pouco sobre superfície e superfície de revolução, os Alunos retomaram o conceito de sólido. O Aluno C falou que encontrou o conceito de sólido e o Aluno E interessou em saber mais sobre o que ele havia encontrado. Então, o Aluno C fez a leitura do conceito: “Um sólido de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno de uma reta que está no mesmo plano da região; a reta é denominada eixo de revolução. Muitos sólidos conhecidos são desse tipo.” (ANTON, 2007, p. 452)

Em seguida, o Aluno J fez uma leitura em voz alta, parecendo ler para si mesmo: “Superfície é o que circunscreve os corpos, os limites de um corpo, o comprimento ou a largura considerados sem profundidade, extensão da face ou do conjunto de faces que limitam um corpo, extensão de uma área limitada.” No manual elaborado pela pesquisadora sobre *software* K3DSurf esse conceito, está presente na forma de uma citação de Michaellis (2009) .

Percebeu-se que os Alunos C, G, E, N e J leram os conceitos de forma aleatória, focando-se nos conceitos de sólido e superfície. Alguns desses Alunos até procuraram complementar algo que outro Aluno tinha falado, buscando atenuar a dúvida do grupo. Porém, percebemos alguns momentos em que os conceitos eram falados aleatoriamente e não eram discutidos pelo grupo.

Os Alunos deram prosseguimento às Atividades Exploratório-Investigativas. O Aluno C mostrou para o Aluno N o que é superfície no conceito de um dos livros que disponibilizamos e o Aluno N buscou apresentar o que entendeu: “que é um conjunto girado... é... borda né? E esses conjuntos que não têm borda né, é um conjunto aberto, e esse conjunto aberto não vai ter uma superfície.”

Aluno G, por não prestar atenção no momento anterior, solicitou que o Aluno E explicasse novamente o conceito. “Se você girar um conjunto aberto, ele não vai ter superfície”. O Aluno N ao repetir o seu entendimento do conceito de superfície, muda as palavras de ordem e podemos notar uma mudança na exposição desse conceito. Pela expressão que pudemos observar desses alunos, tivemos que o conceito explicitado não foi algo que todos conseguiram imaginar.

O Aluno J, então, concluiu que seria um conjunto aberto, aquele que não tem pontos de ligação, e fez gestos para mostrar o exemplo de algum objeto “pontilhado” (Figura 36). Dessa forma, percebemos que o Aluno J buscou mostrar um exemplo no qual não teria uma superfície. Ele disse: “Viu? Aprendi!”

Figura 36: Gestos representativos do objeto "pontilhado"

Nesse episódio, entendemos que os Alunos conseguiram assimilar o conceito quando imaginaram que em um conjunto aberto teríamos pontilhados e não existiria, desta forma, uma superfície pontilhada pelo conceito lido por eles.

Após os 15 minutos, no qual os Alunos trabalharam só pesquisando o material disponibilizado pela pesquisadora, foram distribuídas as Atividades Exploratório-Investigativas 2 para que eles respondessem as questões propostas. Indicou-se que eles poderiam continuar utilizando o material de apoio para tentar suprimir as dúvidas que, por acaso, aparecessem.

Assim, na questão 1, perguntou-se: *"Qual o conceito de superfície?"*

O Aluno E fez a leitura da questão 1 e buscou tentar encontrar uma resposta. O Aluno C indicou o dicionário de matemática para responder a pergunta, mas o Aluno E disse: "Eu acho que é a curva,... é a curva em volta de um eixo."

Buscando explicitar um conceito apreensível, o Aluno N disse: "Vai girando... É a superfície gerada pela rotação de uma curva em volta de um eixo."

Nesse momento, os Alunos J e G alertaram que aquele conceito restringia-se à superfície de revolução, "Eu não havia pensado, mas aqui [ela aponta para o manual do *software* K3DSurf] está falando que é o limite da largura sempre que você dá a profundidade."

O Aluno C, então, fez a leitura do conceito encontrado no dicionário de matemática de Cardoso (2007, p. 430) em que diz que superfície "é a figura gerada por uma linha que se desloca no espaço".

Percebeu-se que os Alunos, em seguida, copiaram o conceito de superfície presente no manual do *software* K3DSurf e, nesse momento, a pesquisadora ressaltou que apesar de buscarmos um conceito formal, ele poderia ser escrito com as próprias palavras.

Em uma passagem seguinte, enquanto o Aluno C manipulava o sólido [cone], a pesquisadora interferiu perguntando como o grupo definiria a curva que gerou a superfície no sólido que estava na mão do colega.

Esse Aluno colocou o sólido sobre a mesa e o Aluno J disse que era a geratriz (Figura 37). Assim, o Aluno C, tentou indicar esse elemento, passando o dedo o sobre uma geratriz imaginária.

Figura 37: Aluno C mostra a geratriz no sólido Cone

Percebemos que Alunos definiram superfície limitando-se ao conceito de superfície de revolução. A pesquisadora, então, argumentou que o conceito pedido era mais abrangente do que o conceito que eles estavam trabalhando.

O Aluno C, exemplificou a tampa da mesa retangular e apontou para uma linha que seria o comprimento desse retângulo e falou que a linha ia deslocando para o lado.

Quando o Aluno J tentou escrever o conceito, ele questionou ao grupo: “Todas as superfícies podem ser definidas geometricamente?” Ninguém respondeu nada. Então ele complementou: “Acho que não,... não sei.” Nesse momento, a pesquisadora interferiu no trabalho dos Alunos questionando sobre o que seria uma superfície definida geometricamente ou não.

Aluno C pronunciou que: “Se eu pegar uma superfície de 1D, não tem, ela será apenas uma linha.” (Figura 38)

Figura 38: Representação gestual da dimensão 1D

O Aluno J ressaltou que mesmo em uma dimensão, ela corresponderia a uma definição geométrica, e todos concordaram com ele, inclusive o Aluno C.

Entretanto, a que o Aluno C se referiu, era a representação de superfície em 1D, pois ele complementou: “eu não consigo representar em 1D uma superfície, é só linha.”

O Aluno N entrou na discussão e disse: “Mas é um conceito geométrico, não importa a dimensão que você tem.” Nessa discussão, a pesquisadora interferiu novamente, perguntando o que eles entendiam por conceito geométrico, mas os Alunos não souberam responder imediatamente.

A pesquisadora questionou sobre o que queriam dizer com o termo “geometricamente”. O Aluno E disse: “Uma forma definida” e o Aluno J disse: “É geométrico o que pode ser definido por régua e compasso.”

O Aluno C então consultou o dicionário de matemática de Cardoso (2007) buscando encontrar a definição de geométrico. Ele foi pronunciando as palavras na ordem disponibilizadas no dicionário “Geometria, Geometria clássica, geometria euclidiana,...”

O Aluno J solicitou que ele lesse o conceito de geometria. Então, eles viram que segundo Cardoso (2007), geometria: “É a ciência da extensão. Estuda as propriedades, as relações e as formas das figuras e dos sólidos, ou seja, no plano, no espaço bidimensional e no espaço tridimensional.” (CARDOSO, 2007)

Então o Aluno N concluiu que “É o que tem forma.” E assim, o Aluno J concluiu que “Então tudo é...”, ou seja, todos os tipos de figura. Compreendemos que todos os Alunos concordaram balançando a cabeça positivamente.

Desta discussão, a resposta que os Alunos E, N e J entregaram por escrito, ficou assim: “Superfície é a parte exterior dos corpos, são os limites de um corpo. Algumas superfícies podem ser definidas geometricamente ou por uma propriedade comum a todos os seus pontos. É gerada por uma linha que se desloca no espaço, podendo manter invariável ou não em forma e grandeza, segundo uma função ou lei determinada.”

A resposta dos Alunos C e G foi: “Superfície é a parte exterior dos corpos; é o limite de um corpo; o comprimento e a largura considerados sem profundidade. As superfícies podem ser definidas geometricamente ou por uma propriedade comum a todos os seus pontos.”

Na questão 2 dessa Atividade Exploratório-Investigativa, perguntou-se “Uma superfície é representada em que dimensões conhecidas? 1D, 2D, 3D,...”O Aluno C prontamente respondeu ser uma superfície representada em “2D”, mas o Aluno E respondeu de modo equivocado ao considerar que “Em 1D que é a reta, em 2D que é a esfera e 3D que é o parabolóide.” Ele perguntou aos colegas se um cone também é representado em 2D, e os Alunos C e N confirmaram positivamente.

Os cinco Alunos não perceberam o erro conceitual falado por E, mas não interpretamos inicialmente que eles tenham uma definição errada desse conceito, tendo sido apenas uma distração. Em seguida, o Aluno J disse que em algum dos materiais havia uma citação desses conceitos sobre dimensão. O Aluno N procurou e encontrou na apostila do *software* K3DSurf escrito que superfície: “Tem duas dimensões, comprimento e largura” (p. 4)

Nesse momento, o Aluno J fez uma expressão como se não concordasse com a definição, “Não pode ser...”. Os outros Alunos ficaram com dúvidas quanto ao conceito, olhando uns para os outros. Como vimos anteriormente, eles consideravam que a esfera estaria em 2D, e pela discussão, esse conceito estaria em contradição com o que os Alunos falaram.

A pesquisadora, então, interferiu na discussão dos Alunos, perguntando: “Eu calculo a área ou o volume de uma superfície?” No mesmo instante o Aluno J respondeu ser a área, e todos os Alunos concordam. Então, quando a pesquisadora interrogou se era possível calcular o volume de uma superfície, todos os Alunos responderam que não.

A pesquisadora pegou um cilindro de madeira, e perguntou o porquê de se calcular o volume desse sólido. O Aluno C respondeu que esse cálculo era feito porque o cilindro tem três dimensões.

Nesse momento, o Aluno J perguntou: “Não é duas? Comprimento, largura...” e o Aluno G complementou: “...e profundidade.”

Dessa discussão, o Aluno N concluiu que a superfície tem duas dimensões, pois temos comprimento e largura. O Aluno G apontou para a apostila do *software* K3DSurf e leu que não existia profundidade.

Assim, a resposta dos Alunos E, N e J, por escrito, foi: “A superfície é representada em 2D, sendo elas largura e comprimento, não possuindo profundidade.” Os Alunos C e G escreveram de forma bastante semelhante: “A superfície é representada em dimensão 2D, que são: largura e comprimento.”

Em seguida, tivemos na questão 3: *“Tendo respondido a Questão 1, o que vocês podem inferir sobre plano e sólido?”*

O Aluno J já iniciou com a interjeição: “Ai, meu Deus!”

Os Alunos prosseguiram a Atividade Exploratório-Investigativa. O Aluno N disse: “O plano está em segunda dimensão, certo?” Os Alunos J e C disseram respectivamente que sim e que ele estava em 2D.

O Aluno N prosseguiu com mais algumas perguntas: “E o sólido está em terceira... A superfície do sólido está no plano, certo?” e o Aluno G apenas balançou a cabeça positivamente e o Aluno N perguntou se existia mais algum conceito de plano e área.

Aluno J encontrou uma definição no dicionário Michaellis (2009) na qual ele disse que observava ali alguns conceitos sobre plano e área. O Aluno N leu a definição de superfície toroidal trazida por esse dicionário: “[...] a que se obtém fazendo girar uma circunferência em volta de uma reta externa a ela, mas situada em seu plano”. Mas ele disse não ter entendido nada, e os Alunos J e E também demonstraram não compreender.

Então, o Aluno G procurando alguma definição verificou no dicionário de matemática Cardoso (2007), que plano é uma superfície. O Aluno E sugeriu colocar na folha de respostas que os “sólidos estão contidos no plano.” Mas os Alunos N e J disseram que não era isso e sim o contrário.

O Aluno J ainda complementou: “Mas nem sempre, porque foi como o C. falou, se você por uma bola e tirar uma coisa e for bola aberta, não vai ter superfície.” Ele olhou pra o Aluno C e perguntou se não foi aquilo que ele tinha falado e ele concordou. Isso significa que podemos supor que para eles um sólido aberto não teria superfície se a linha que gera o corpo não fosse contínua.

Aluno J disse que ia colocar na folha de respostas que o plano é uma superfície. Então, o Aluno G pesquisou no dicionário de matemática Cardoso (2007) e complementou que o plano é uma superfície e limitada.

O Aluno E interrogou sobre o que seria esse limite e o Aluno J perguntou se não seria o sólido. Assim o Aluno N explicou que: “O sólido é ilimitado (...) porque assim, o plano é uma superfície e limitada, certo? Aí o sólido, ele é formado pela superfície e o interior, não é isso que a gente definiu?”

O Aluno J afirmou, em seguida, que ele poderia falar que o sólido tem três dimensões e o Aluno E sugeriu fazer uma procura no material disponibilizado pela pesquisadora e todos os Alunos concordaram com a sugestão.

Deste modo a pesquisadora, vendo as dúvidas dos Alunos em prosseguir com os exercícios, interferiu para tentar ajudá-los, orientando-os a relacionar o conceito de superfície ao de sólido, pois eles já tinham relacionado o conceito de superfície no plano.

Ele fez a pergunta usando uma representação de uma esfera de isopor. “O que é superfície no sólido?”. O Aluno C perguntou se era a superfície limitada dele e o Aluno N disse que seria uma região plana. Em seguida, o Aluno C envolveu a representação da esfera no isopor com a mão e disse que é a casca (Figura 39).

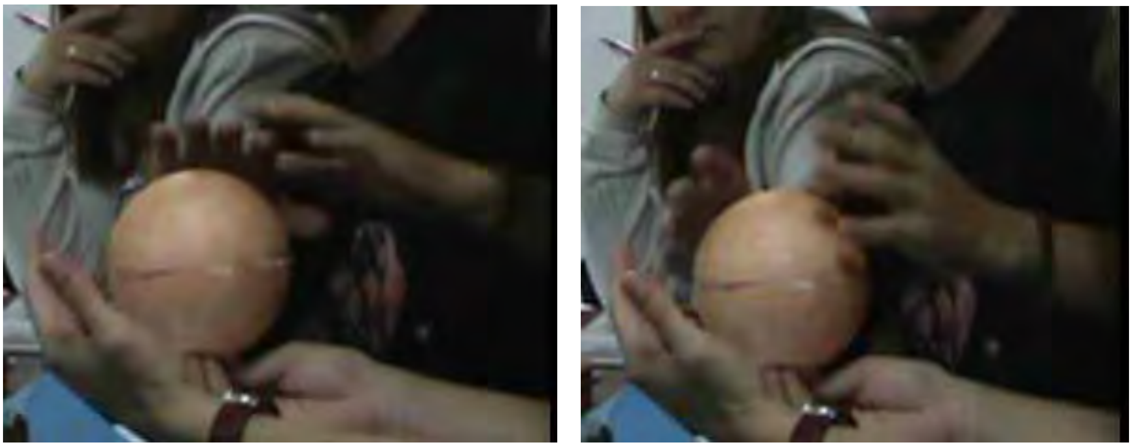


Figura 39: Propriedades geométricas da bola de isopor

A pesquisadora continuou discutindo com os Alunos e perguntou o que seria a superfície no cone, mostrando o objeto pela representação no material manipulável. Então, o Aluno E disse que seria a borda dele e o Aluno C explicitou como a “forma do sólido”.

“Quando vocês olham para o sólido conseguem ver o que é superfície nele?”, a pesquisadora interrogou. O Aluno J fez com as mãos o formato do cone juntamente com a base dele, mostrando ser todo o conjunto a superfície desse sólido (Figura 40).

Figura 40: Gestos para representar uma superfície

O Aluno C disse que superfície seria o que está por fora e o Aluno G frisou que seria somente o que está por fora. Nessa ocasião faltava apenas os Alunos colocarem suas respostas no papel e, dessa forma eles fizeram de forma sucinta.

Os Alunos E, N e J escreveram que: “O plano é uma superfície ilimitada. O sólido é limitado por uma superfície limitada.” Os Alunos C e G anotaram: “O plano é uma superfície ilimitada de 2D. O sólido é limitado por uma superfície limitada; essa superfície envolve o sólido."

Na questão 4, os Alunos deveriam discutir e responder: *Quais os tipos de superfícies que encontramos, ao nosso redor, no nosso ambiente?"*.

O Aluno J respondeu que seria na sala em que estávamos e ressaltou: "Nossa, tem tantos!" A pesquisadora orientou que não precisavam ser, necessariamente, exemplos de superfície dentro da sala.

Os Alunos, então, tentaram generalizar os exemplos. Um Aluno disse que seria a casquinha dos sólidos, outro Aluno tentou falar os tipos, tais como a "superfície esférica..."

Notamos que enquanto uns Alunos se preocuparam com os conceitos e exemplos do livro, outros procuraram exemplos reais, principalmente no ambiente em que estávamos.

Um Aluno apontou para o pôster da sala e falou que era uma superfície plana e outro Aluno falou que uma superfície esférica poderia ser exemplificada pelo astro sol.

O Aluno C também falou sobre as superfícies cilíndricas e o Aluno E pediu que ele desse um exemplo. O Aluno C apontou para o cone, mas o Aluno E queria saber um exemplo do "nosso ambiente", pelas palavras do outro aluno. Então o Aluno J disse ser a casquinha do sorvete e o Aluno C pegou a representação do cone e colocou o vértice para baixo, mostrando o que seria a casquinha (Figura 41).

Figura 41: Representação de uma "casquinha de sorvete"

Os Alunos exemplificaram como superfície esférica, uma capota de um carro, uma bola e o sol.

Deste modo, o Aluno J perguntou sobre exemplos de superfície de revolução. O Aluno C disse: "É... aqueles que os antigos usavam pra tomar água, que tem uma tampinha em cima, de metal,..." Ele fez o gesto com a mão, dando voltas com o dedo pelo ar (Figura 42).


Figura 42: Representação gestual de uma "moringa"

O Aluno J perguntou se ele não se referia à Moringa, e se preocupou em exemplificar a moringa feita de barro e não a de metal, como se houvesse diferença na representação. O Aluno E questionou, então, se esse seria um exemplo correto para superfície de revolução e os Alunos J e N tentaram explicar que se você considerasse uma curva, ela seria a mesma em todo o sólido. O Aluno E então pareceu entender a explicação das colegas e disse que a jarra ou um vaso também seriam alguns exemplos.

A pesquisadora, considerando que eles não colocariam todos os tipos de superfície, pegou um origami no armário da sala em que estavam trabalhando, e perguntou qual o tipo de superfície que se encaixava para cada um dos origamis, mas o Aluno J disse não ser nenhum deles. A pesquisadora perguntou também se poderia ser identificada superfície no estojo do Aluno e em caso positivo, qual seria a classificação dada por eles daquela superfície.

Então o Aluno J pareceu perceber que existiam outras classificações para superfícies e não só aquelas que o grupo considerava naquele momento. O Aluno C pegou o Origami com formato de uma esfera com pontas em torno dela e tentou classificá-la de acordo com a descrição exposta na apostila. Ele disse ser uma superfície cônica, mas o Aluno E considerou ser uma superfície de revolução. Um Aluno disse que uma superfície cônica não seria, pois um cone é pontudo para baixo e o Aluno C concordou com ele. O Aluno E então quis saber como se chamaria esse tipo de superfície.

O Aluno N ressaltou que podíamos encontrar superfícies “incomuns”, segundo as palavras dele, superfícies que não poderiam ser classificadas de acordo com os tipos caracterizado por eles, então pediu que os Alunos colocassem na folha de respostas: “dessas e daquelas que não estudamos, porque essas são bem certinhas né? (...) A diferença é que estas são coisas mais definidas, porque esse aqui [aponta para o estojo], o estojo eu não consigo definir o geométrico, a forma geométrica...". O Aluno E então ressaltou que o estojo não tinha uma forma geométrica definida.

Eles continuaram escrevendo a resposta do exercício dando os exemplos e o Aluno J deu o exemplo da bola de futebol, o qual todos concordaram em colocar. Como exemplo de superfície de revolução foi sugerido pelo Aluno E que a esta fosse exemplificada pela jarra, mas os Alunos J, N e C disseram que a jarra nem sempre é de revolução, podendo ter formatos variados. O Aluno J, então, indicou o exemplo de um copo e todos concordaram não se atentando para o fato dele poder ter outra forma.

Para as superfícies que não se enquadraram na classificação, o Aluno E sugeriu exemplificar com o estojo e a cadeira e o Aluno C sugeriu a mesa, ou seja, buscando encontrar elementos observados na sala em que estavam. O Aluno J questionou se toda superfície de rotação seria simétrica, e os Alunos G e C afirmaram positivamente para pergunta dele.

Para continuar a responder a questão, o Aluno J pediu que eles definissem a diferença dos tipos de superfície que estudamos na escola e aquelas que vivenciávamos e/ou manipulávamos diariamente. O Aluno E disse que as estudadas na escola não tinham uma forma geométrica definida e o Aluno N pareceu concordar. No armário da sala onde estávamos, havia sólidos que são exemplificados nos livros, e este Aluno questionou como poderíamos calcular o volume desses sólidos disponibilizados no armário.

O Aluno J disse que o cálculo do volume de uma figura poderia ser feito pelo método matemático de calcular a integral. O Aluno N concordou com o Aluno J e justificou que para estes objetos tínhamos uma forma definida.

A resposta que os Alunos E, N e J entregaram por escrito, ficou assim: "Ao nosso redor, encontramos superfícies esféricas, cilíndricas, de revolução e ainda algumas que não se enquadram mas já citadas, como por exemplo: câmera de uma bola de futebol, um lápis, casquinha do sorvete, moringa, a superfície de um estojo, de uma cadeira. A diferença entre as superfícies que estudamos na escola, com a que vivenciamos em nosso dia-a-dia, é que aquelas que estudamos têm uma forma geométrica definida, e a que vivenciamos nem sempre."

A resposta dos Alunos C e G, foi: "Encontramos no nosso ambiente superfícies esféricas, cilíndricas, cônicas, de revolução e algumas que não se enquadras [*sic*] nas citadas anteriormente, como por exemplo: câmara de uma bola, o tronco de uma árvore, a casquinha de sorvete, moringa, a superfície de uma mesa, de uma cadeira, de um estojo. A diferença do tipo de superfície que estudamos na escola com as que encontramos em nosso ambiente é que as que encontramos no nosso dia-a-dia nem sempre têm a forma geométrica definida e as que estudamos na escola têm forma geométrica definida. ”

Na questão 5, temos: *“O que representa o sólido?”*

Os Alunos J e C disseram não saber. Então o Aluno E se disponibilizou a ver o conceito no dicionário, localizou-o em um dos livros disponibilizados, no qual dizia ser uma região plana que gira em torno de uma reta no plano. Os outros Alunos consideraram essa definição como um exemplo de sólido de revolução, mas o Aluno E achou que esse seria um conceito geral de sólidos.

O Aluno G perguntou se a superfície era a região que envolve o sólido e os Alunos confirmaram a pergunta. A pesquisadora então perguntou “o que seria a superfície” e os Alunos G, C e E responderam que “é a região que envolve o sólido”. Em seguida, o Aluno E perguntou o que seria o sólido, e os demais Alunos respondem ser “a região envolvida pela superfície.”

Dessa discussão, temos que as respostas escritas pelos Alunos N, J e E foi: “Um sólido é a região envolvida pela superfície.”; e os Alunos C e G responderam: “Um sólido é o que é envolvido por uma superfície.”

Prosseguindo o desenvolvimento da Atividade Exploratório-Investigativa 2, foi perguntado na questão 6: *“Qual o conceito de volume?”*. O Aluno G disse que “é o espaço ocupado pelo sólido.” “Pelo corpo né?”, ressaltou o Aluno J, e todos concordaram.

A discussão parecia estar encerrada e a resposta já estava sendo composta, quando o Aluno J perguntou se é a região compreendida pela ou pelas superfícies. O Aluno N disse ser “pelas” mas o Aluno J pareceu não concordar e perguntou se no cone de papelão não seria envolvido só por uma superfície ao invés de mais superfícies como ele entendera ser falado pelo Aluno N. Todos os Alunos disseram ser por mais de uma superfície e a discussão foi finalizada.

Em seguida, os Alunos passaram a escrever o conceito de volume, sendo elaborado sem muita dificuldade e discussões neste momento.

Acreditamos que o Aluno J, tentando formalizar a definição, utilizou a apostila como material de consulta, em que o volume “de um corpo é o espaço ocupado pelo referido corpo”, conceituado por Cardoso (2007, p. 475) e depois também fez a leitura do conceito trazido por Michaellis (2009).

Os Alunos se atentaram para os diferentes tipos de definição de volume em diferentes contextos e tentaram entender cada um deles, por exemplo: volumes de uma coleção de livros, capacidade de líquido, som... Porém, quando escreveram as respostas, se limitaram apenas ao volume do sólido, como podemos notar pelas respostas dadas pelos Alunos E, J e N, nas quais definiram que “Volume é o espaço ocupado por um corpo, onde esse corpo está no espaço 3D.” e também pelos Alunos G e C quando disseram que “Volume é o espaço ocupado por um determinado corpo, que está no espaço 3D.”

O Aluno E pareceu ainda não entender o conceito de volume e foi o único a demonstrar dúvida nesse conceito. Ele então indagou: “A gente tá aumentando o volume do som, a gente tá aumentando o volume do corpo?”, o Aluno C disse que o volume tinha uma idéia de medida, ou seja, é a medida do volume que se propaga.

Na questão 7, perguntamos: *“Qual a relação entre o sólido e o volume?”*

O Aluno J disse que o volume é o espaço ocupado pelo sólido e o Aluno E questionou se podia existir volume sem sólido. O Aluno N disse que um sólido sempre tem que ter volume.

A pesquisadora então retomou um conceito explicitado pelo Aluno C, quando ele disse que volume era uma medida. Ela procurou que os Alunos fizessem essa relação entre sólido e volume, como o volume sendo a medida do sólido, e não pela existência de volume no sólido. Os Alunos pareciam entender sobre o que a pesquisadora discutia com eles.

Em seguida, a pesquisadora perguntou o que medimos no sólido e o Aluno J disse que era o espaço que o sólido ocupa. Nesse momento a discussão acabou e os Alunos escreveram a definição na folha de resposta disponibilizada para eles. Os Alunos, mesmo em duas folhas separadas, expressaram-se da mesma forma concluindo que: “A relação entre o volume e o sólido, é que o volume é a medida do espaço ocupado por um sólido.”

Na questão 8, pedimos que *“Recordando o conceito dado na Questão 1, sobre superfície, para você o que representa a superfície em um sólido?”*

Os Alunos disseram que seria “a casca”, “a casquinha”, “aquilo que é a fronteira” e também o “exterior a aquilo tudo” e seguiram para a escrita da definição no papel, tornando essa discussão bem breve.

O Aluno N tentou ditar a resposta para o colega escrever, mas em meio a isso pareceu não estar totalmente certo do conceito. O Aluno N, então, perguntou se superfície era “aquilo” em torno, o que limita, e o Aluno E complementou dizendo que “é aquilo que limita a região do sólido abordado.”

Dessa forma, o resultado encontrado na folha de respostas dos Alunos E, J e N foi o seguinte: “A superfície é o que limita a região do sólido abordado.” Os Alunos C e G procuraram descrever de uma maneira informal, com caracterização do cotidiano, e trouxeram que: “A superfície é a “borda” do sólido; é o que limita a região do sólido.”

Os Alunos seguiram para a questão 9: *"O que são superfícies de revolução? Quais suas características principais? Vocês poderiam citar elementos comuns em todas elas? (como eixo, curva, direção de rotação)"*

O Aluno E fez a leitura pelo livro do Anton (2000, p. 485) o qual apresenta que "Superfície de revolução é aquela gerada fazendo girar uma curva plana em torno de um eixo..." Os Alunos utilizaram dessa definição para escrever na folha de resposta, mas um Aluno questionou uma expressão presente no conceito, dizendo não entender o que significava a "curva plana". O Aluno J disse que era a curva que você "pega" num plano e gira. Em seguida o Aluno N ressaltou que "é uma superfície, superfície é no plano" não sendo o sólido.

O Aluno C ressaltou que achou estranha a expressão "curva plana", pois para ele, a curva não é plana, mas está no plano. Mas o Aluno E disse que "se a curva está no plano, então ela é plana."

O Aluno J leu a definição de Michaellis (2009) sobre superfície de revolução como sendo aquela superfície "gerada pela rotação de uma linha em torno de uma reta fixa, à qual ela se acha invariavelmente ligada." Disse que essa definição ele havia entendido, mas ao continuar lendo a definição de superfície desenvolvível, passou a não compreender mais o conceito de superfície.

Apesar de um Aluno ter ressaltado que não havia entendido o conceito, ninguém prosseguiu nessa questão. Consideramos que os Alunos tinham entendido o conceito principal de superfície de revolução, e então, essa outra parte foi deixada de lado.

Para definir as principais características das superfícies, os Alunos C e J disseram ser as "regulares", e todos concordaram. O Aluno J começou a pensar nos exemplos para encontrar se seriam todos regulares e simétricos. Para ilustrar, ele pensou no pentágono e no tetraedro, e então disse: "Ele é regular, porque é simétrico. Se você cortar ao meio... Mas também fica mais complicado falar que é simétrico do que regular, né?" Podemos relacionar a fala do aluno aos gestos que ele fez no mesmo instante, representado pela Figura 43.


Figura 43: Representação gestual de uma simetria

Por fim, essa discussão terminou e os Alunos E, J e N conceituaram superfície de revolução, como sendo a "gerada ao girar uma curva plana em torno de um eixo. A principal característica de superfícies de revolução é a simetria em relação ao eixo de revolução." Os Alunos C e G responderam que "Superfície de revolução é gerada ao girar uma curva plana em torno de um eixo fixo. A principal característica de superfícies de revolução é a simetria em relação ao eixo de rotação."

Análise Semiótica das Atividades Exploratório-Investigativas 1 e 2

Em um primeiro momento, apresentamos o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas 1 e 2 e notamos que os Alunos, em uma Análise Semiótica, podem ser denominados Interpretantes, pois ficam presos à qualidade do objeto, ou seja, procuram a partir das diferentes estratégias, elucidar a qualidade do objeto matemático, como pode ser notado na discussão das questões.

Cada uma das questões que estavam impressas na folha de papel, ao serem lidas pelos Alunos, nos permitiram verificar que constituem o Fundamento. Como exemplo, a primeira questão da Atividade Exploratório-Investigativa 1, constitui-se por elementos denominados signos, que estão representados por palavras distribuídas em uma folha de papel e trazem, aos sujeitos da pesquisa, a primeira impressão para uma interpretação para a frase.

Nessa, como nas demais questões da Atividade Exploratório-Investigativa 1, temos que os Alunos proferiram palavras, fizeram gestos, esboçaram figuras e formaram objetos. Esses constituem para os Alunos diversas formas de representação desse signo.

Nessa Análise Semiótica, temos que o Interpretante, ao relacionar-se com o Objeto (conceito matemático de superfície que abordamos neste primeiro caso) tem, inicialmente, o

Objeto Imediato, o qual se trata somente do Objeto representado pelo signo, sem reflexões conceituais sobre ele. Nas discussões e reflexões sobre as propriedades conceituais matemáticas, que foram feitas pelos Alunos, temos o Objeto Dinâmico no desenvolvimento da questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 1. Esse corresponde às respostas dadas pelos Alunos do Objeto Superfície sendo "a pele de alguma coisa", "uma folha", ou também gestos em torno de um cilindro formado pela folha de papel.

Esse processo pode ser notado nas demais questões da Atividade Exploratório-Investigativa 1, nas quais os Alunos prosseguiram fazendo uma utilização notável da manipulação dos sólidos para desenvolver um conceito verbal do que estava sendo pedido. Como temos na questão 3, sobre o conceito de volume, os Alunos consideraram ser, o volume, a medida de um sólido específico, no qual o leitor deveria generalizar para qualquer outro sólido.

Assim, temos que os Alunos, ao manipularem sólidos (pela folha de papel) ou fazerem gestos para ilustrar algumas superfícies, buscaram as relações matemáticas implícitas ao Objeto matemático investigado, procurando estabelecer algumas relações matemáticas ao esboço ou desenho. Nesse momento, temos para Santaella (1994, p. 156), baseada no trabalho de Peirce, a Secundidade, que "é a categoria da efetividade, daquilo que se atualiza. Entre aquilo que é possível (Primeiridade) e a mediação (Terceiridade), interpõe-se aquilo que é responsável pela realização concreta." Pois só a qualidade do Objeto não traduz o seu significado, sendo necessário mostrar como essa qualidade se manifesta no próprio Objeto, observado pelo fato de que os Alunos utilizaram o próprio cilindro para representar e discutir sobre o conceito de sólido.

Nessa interação, também temos momentos nos quais os Alunos buscaram, com a visualização de uma bola de isopor, maneiras de mostrar o entendimento sobre superfície, área, sólido e volume. Consideramos esse momento, o processo de interpretação do signo, que se inicia quando temos o primeiro contato do Aluno com as palavras superfície, volume ou sólido. O Interpretante Dinâmico representa a produção do signo na nossa mente, e o Interpretante Final constitui-se do ato de interpretação dado pelo signo e pela mente em contato com a bola de isopor, ou seja, este interpretante abordado, apresenta-se pelos conceitos formados ou redefinidos durante as Atividades Exploratório-Investigativas, nas quais os alunos, em contato com alguns elementos, proferem novas relações conceituais.

Quando cada Aluno lidou com o conceito apresentado pelo outro, quando manipulou um Objeto, esboçou uma figura, entre outros aspectos esse Aluno redefiniu conceitos para o signo, e com o contato com a bola um novo modo de considerar os conceitos solicitados pela pesquisadora, são explicitados por cada um.

Dessa forma, pelas interações e discussões, modos de visualização e modos de representação é que notamos os conceitos matemáticos caminhando para uma possível relação do Objeto e da mente desses Alunos, os quais buscam uma generalização do conhecimento matemático. Assim, temos a Terceiridade, a qual se caracteriza pela ação entre o signo e os processos mentais de visualização e representação dos conceitos geométricos.

Durante a Atividade Exploratório-Investigativa 2, os processos semióticos reproduziram-se de maneira muito semelhante, porém, com a inclusão dos materiais didáticos disponibilizados aos Alunos nesse segundo momento. Os Alunos compararam os conceitos iniciais que foram colocados na Atividade Exploratório-Investigativa 1, e reorganizaram o pensamento, constituindo outros signos ao Objeto – conceito matemático – presente nas questões.

Como podemos encontrar na questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 2, os Alunos passaram a entender o conceito de Superfície de maneira um pouco mais formal, e não de modo limitado como observamos na Atividade Exploratório-Investigativa 1, quando eles dizem que "Superfície é o que envolve um sólido". Desse modo, na Atividade Exploratório-Investigativa 2, notamos que o Objeto Imediato, constituído pela discussão na Atividade Exploratório-Investigativa 1, é trabalhado na Atividade Exploratório-Investigativa 2, de forma que os Alunos abarquem uma concepção diferenciada desse conceito – Objeto Dinâmico. Nas leituras sobre conceitos de superfície, realizadas pelos Alunos nos diversos materiais disponibilizados pela pesquisadora, os Interpretantes reorganizaram sua forma de pensar o Objeto. Como pudemos encontrar na questão 1 essa relação corresponde ao conceito de Superfície.

Assim, na ação entre signo e mente – Interpretante Final - os Alunos formaram um novo signo para o Objeto Superfície, ressaltando que cada Aluno constituiu o seu próprio signo. Pudemos perceber que a mudança conceitual não foi contrastante, mas incluiu novas formas de conceituar o Objeto, como na definição dada pelos sujeitos da pesquisa para superfície sendo "a parte exterior dos corpos, são os limites de um corpo. Algumas Superfícies podem ser definidas geometricamente ou por uma propriedade comum a todos os seus pontos." Dessa forma, temos a composição do conceito, que na mente de cada Aluno, ainda se constitui de modo singular, mesmo escrevendo em comum acordo o conceito na folha de papel que foi entregue à pesquisadora.

Na discussão da questão 2 da Atividade Exploratório-Investigativa 2, notamos um momento importante de reorganização do conceito pelos Alunos, ao discutirem as dimensões 1D, 2D, e 3D. Além do que foi pedido, entrou-se em uma discussão implícita sobre o significado dos números que representam cada dimensão, no caso do 3D correlacionando a pelo comprimento, largura e profundidade. Os Alunos não receberam uma resposta direta sobre os elementos que constituem 1D, 2D ou 3D, mas trabalharam exemplos visuais, verbais e mentais dos conceitos presentes, o que foi denominado por Gutiérrez (1996 apud FARIAS, 2007, p. 97) como uma "representação externa [...] que ajuda a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual."

Nessa perspectiva, continuando a descrição da Análise Semiótica dessa pesquisa, em um segundo momento, referir-nos-emos à segunda categoria denominada: *Processos de Visualização dos Entes Geométricos.*

5.2. PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO DOS ENTES GEOMÉTRICOS

Os processos de Visualização dos Entes Geométricos, na perspectiva teórico Peirceana, referem-se à Secundidade, pois se caracterizam pelo modo com o qual os Alunos lidam com as reproduções das obras artísticas, esboços ou representações geométricas. Interessa a nós compreendermos como os Alunos percebem as figuras, tecem relações perante o contexto em que estão inseridas. São conhecimentos que se evidenciam em questões tais como: "Identifiquem algumas superfícies e sólidos...".

Nas Atividades Exploratório-Investigativas 3, 4 e 5, intituladas "Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*", "Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução" e "Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo" respectivamente, as quais desenvolvemos na pesquisa, encontra-se esse tipo de questionamento, propondo a identificação das superfícies, dentre as quais incluímos a superfície de revolução e também a identificação dos sólidos, entre eles os sólidos de revolução.

Nesse momento, optamos por explicitar as Atividades Exploratório-Investigativas, por meio de uma Análise Semiótica, de alguns excertos qualitativos retirados das Atividades Exploratório-Investigativas 3, 4 e 5, os quais relacionam-se a essa categoria.

Na **Atividade Exploratório-Investigativa 3:** "Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*", temos que a pesquisadora iniciou o trabalho com o *software* K3DSurf. Os Alunos receberam as folhas destinadas às Atividades Exploratório-

Investigativas e foram disponibilizados um computador, com acesso à Internet e com o *software* K3DSurf, além de um tutorial do *software* contendo também alguns conteúdos matemáticos. As duplas foram instruídas a consultar o tutorial para a utilização do *software* e, em seguida, iniciar o cumprimento das Atividades Exploratório-Investigativas.

Os Alunos J e N formaram uma dupla e os Alunos E e G outra. Eles iniciaram a Atividade Exploratório-Investigativa 3, realizando a leitura do tutorial. Notamos que os Alunos estavam atentos ao conteúdo exposto. No momento em que eles começaram a ler as potencialidades do *software*, também ousaram utilizá-lo, tendo a primeira dupla feito isso com mais ênfase. Os Alunos E e G tentaram observar como a outra dupla manipulava o *software* e retornaram ao tutorial buscando conhecer melhor o K3DSurf. Nesse dia, apenas um cabo de Internet estava disponível para os Alunos. Como as duas duplas deveriam consultar algumas figuras nos sites da Internet, sugerimos que uma dupla consultasse as figuras em um primeiro momento, enquanto a outra dupla manipulava o *software*. E depois eles inverteram esse processo para realizar as atividades propostas.

Nas questões 1 e 4 da Atividade Exploratório-Investigativa 3, solicitou-se aos alunos que identificassem "algumas superfícies e sólidos nos sites" e "superfícies de revolução representes nas figuras escolhidas".

À princípio, consideramos que essas questões trariam os principais elementos que caracterizam essa categoria intitulada: *Processos de visualização dos entes geométricos*. Porém, percebemos que, em meio às questões que envolviam elementos de representação e algébricos, os processos de visualização faziam-se presentes com uma ênfase maior. Em seguida, descrevemos alguns excertos qualitativos representativos dessa categoria de análise.

Excerto 1: Na questão 2 da Atividade Exploratório-Investigativa 3 tínhamos: *"Represente esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no software. O que vocês consideram que acontece de diferente entre essas diferentes mídias? Quais as vantagens e desvantagens vocês consideram pela visualização em cada mídia?".*

Os interpretantes - Alunos E e G - ao representarem algumas funções no *software* K3DSurf, conseguiram fazer semelhança às figuras escolhidas anteriormente. O Objeto que os Alunos começaram o trabalho foi representado pela Figura24[36].

36 

O Aluno G indicou para seu colega, que eles deveriam inserir no *software* a expressão x^2+y^2-z para reproduzirem um Objeto próximo à representação da Figura 24. Porém, ao clicarem no comando “computar” do *software*, a representação foi a seguinte (Figura 44):

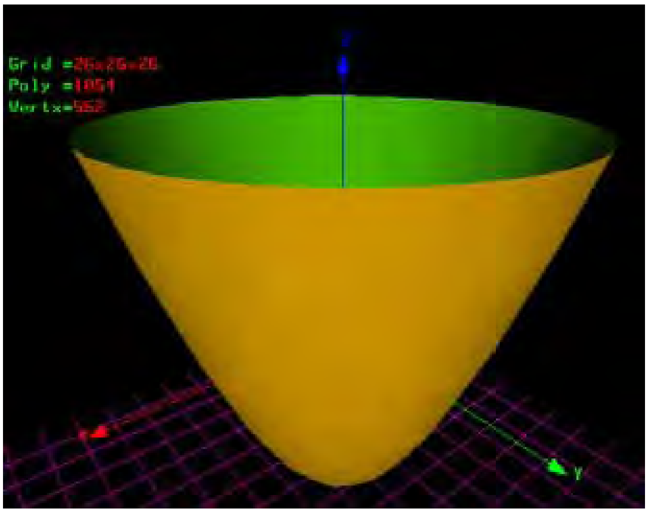


Figura 44: Representação no *software* K3DSurf da expressão x^2+y^2-z

Com essa expressão, os Alunos perceberam que a representação era bem diferente do Objeto representado na Figura 24, mas repararam que a figura assemelhava-se àquela que eles haviam selecionado na questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 1. Desta forma, o Aluno E diz que a representação do *software* assemelhava-se a um cone vazio. O Aluno G concordou com o Aluno E, mas pronunciou que não correspondia à figura que eles estavam procurando representar. Nesse momento o Aluno E voltou às figuras que eles haviam selecionado (questão 1, Atividade Exploratório-Investigativa 1) e mostrou que a representação do *software* assemelhava-se à Figura 45, faltando apenas “fazer o pé”.

Figura 45: Vaso, imagem disponibilizada na Internet

O Aluno G lembrou-se de que na disciplina que eles cursaram no curso de graduação, eles faziam a representação do tronco de cone, mas nenhum dos dois Alunos se lembrava de como isso era feito. Dessa forma, os Alunos viram que deveriam procurar outro modo de representar o pé da figura. No final do desenvolvimento dessa questão, os Alunos utilizaram a expressão $x^2 + y^2 - z^2 - 0,3$, aproximando-se da Figura 45 desejada.

Percebemos que essa relação, tal como os Interpretantes realizaram, é constantemente feita pelos matemáticos. Como Peirce (2008, p.66) explicitou: a “utilidade da semelhança para os matemáticos consiste na sugestão que fazem, de um modo bastante preciso, de novos aspectos de supostos estados de coisas...”. Essa fase é caracterizada pela Secundidade, porém não significa a resolução da questão feita pelos Alunos, quando eles estabeleceram uma relação de semelhança. Essa etapa contribuiu no desenvolvimento da Atividade Exploratório-Investigativa, que pôde auxiliar na construção do conhecimento matemático – sob a perspectiva semiótica da Terceiridade, que será relatada na próxima categoria.

Excerto 2: Outro momento importante no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, constituiu-se no relato dos Alunos, que versava a respeito da manipulação do recurso do *software* no processo de visualização das figuras geométricas.

À principio, os Alunos relataram uma dificuldade de visualização da função no *software* porque os eixos não se apresentavam na posição como eles estavam acostumados a ver e trabalhar. A Figura 46 trazia essa diferenciação, considerando o primeiro esboço como uma disposição inicial dos eixos cartesianos pelo *software* K3DSurf e o segundo esboço como o modo habitual dos Alunos trabalharem com a disposição dos eixos cartesianos. Assim, vemos que os Alunos movimentaram o gráfico, tentando colocá-lo na posição em que era trabalhado nas aulas das disciplinas que eles cursaram.

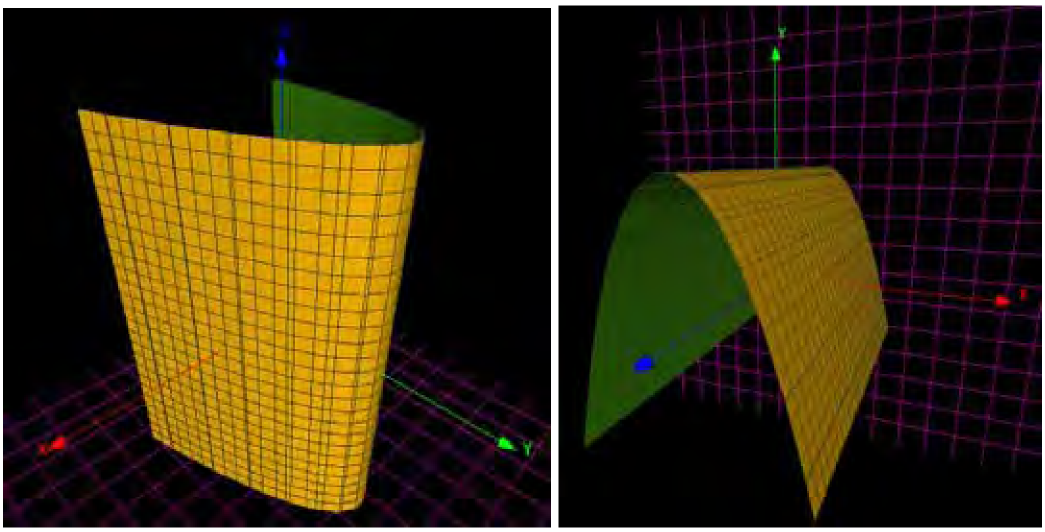


Figura 46: Posição dos eixos cartesianos

Posteriormente, esse trabalho de movimentação foi explicitado pelos Alunos N e J como uma potencialidade do *software* no processo de visualização dos elementos matemáticos com os quais eles estavam trabalhando, pois de acordo com esses Alunos: “No *software*, a visualização é melhor e mais precisa, pelo fato de podermos rotacionar a figura”.

Outra vantagem que apontamos, refere-se ao relato dos Alunos E e G, quanto a explicitação das respostas das questões na folha de papel, os quais ressaltaram a peculiaridade entre o papel e o *software* neste processo de visualização dos entes geométricos: “A desvantagem do papel é que você não sabe como a figura vai ficar rotacionada em qualquer um dos eixos e nem em que eixo a figura está. Ao contrário do *software* que você obtem essa visualização”.

Como podemos notar, esses são os novos ambientes de percepção abordados por Hildebrand (2001, p.55), criados pelas possibilidades das novas mídias e princípios lógicos elaborados pelos *softwares.* Dessa maneira,

> [...] através dos computadores, das novas lógicas na linguagem de programação e de uma grande variedade de formas de visualizar ambientes virtuais, podemos simular *imagens sintéticas* impossíveis de serem construídas longe deste universo. (HILDEBRAND, 2001, p.55)

Para os alunos, considerados por nós como Interpretantes, a função matemática é vista, em um primeiro momento, como um Objeto Imediato. Ao passarem por um processo de discussão e reflexão dos possíveis modos de visualização possibilitados pelo *software,* esse Objeto passa a ser considerado Objeto Dinâmico que, em ação com os processos mentais dados pelo Interpretante Dinâmico, propõe um novo sentido à função matemática trabalhada no momento. Assim, permite-se a formação de um novo signo na mente do Aluno, o que é possível no contexto daquilo que consideramos ser o Interpretante Final.

Nesse sentido, corroborando com as palavras de Presmeg (2001, p. 3, tradução nossa[37]) esse processo consiste em uma produção de novos Signos, inseridos no processo da combinação entre o Signo anterior e o Interpretante. A autora ressalta dois processos, os quais nomeia: “encadeamento metonímia” e “reificação”, ou seja, quando agregamos outros sentidos a um objeto - encadeamento metonímia - e, dessa forma, constituímos um novo Objeto que é representado por um novo Signo - reificação. Esse é o conceito de signo na Teoria Semiótica, no qual “o significado de um signo é outro signo” (SANTAELLA, 2007, p.59). Presmeg (2001) conclui que a construção dos Objetos matemáticos são implicados por esses dois processos supracitados.

Excerto 3: O terceiro momento singular desse trabalho, refere-se ao modo como os Alunos trabalham com a planificação dos sólidos. Notamos que durante a Questão 4 da

---

[37] This formulation allows for a chaining process in which a signifier in a previous sign combination becomes the signified in a new sign combination, and so on. I see this chaining process as involving metonymy - as indeed all signifiers are metonymic in a semiotic model, since they are “put for” something else - and also reification, since each signified in turn is constructed as a new object (Presmeg, 1997a) that is represented by the new signifier. Chaining thus casts light on both processes as they are implicated in the construction of mathematical objects.

Atividade Exploratório-Investigativa 3: “Identifiquem superfícies de revolução presentes nas figuras escolhidas. O que vocês podem perceber nessas figuras fora do papel?” os Alunos E e G discutiram como ficaria a planificação do sólido apresentado a seguir (ver Figura 24)

Pudemos perceber que o Aluno E tentou expressar-se com palavras, mas o Aluno G o interrompeu dizendo que seria um cilindro aberto com a tampa debaixo, fazendo os gestos com a mão (Figura 47).

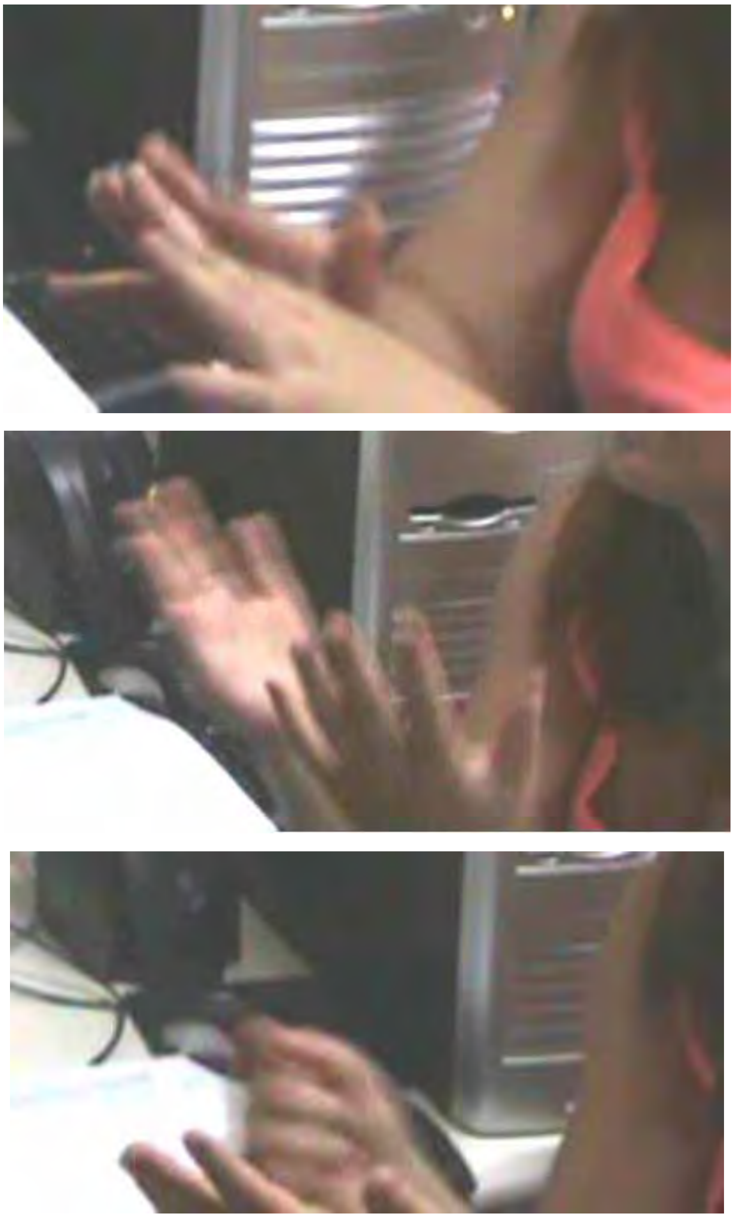


Figura 47: Representação gestual do cilindro

O Aluno E pareceu concordar com o modo como o Aluno G descreveu a maneira de planificar e buscou representá-la no papel como sendo um retângulo. Mas o Aluno G o lembrou que existia uma “tampa” que deveria ser ilustrada “abaixo” do retângulo, como pôde ser visualizado no Sólido, mas o Aluno E não conseguiu perceber em que local seria representado essa tampa, ou seja, o círculo, abaixo desse retângulo, acreditando, em um primeiro momento, que seria, então, ao lado do retângulo. O Aluno G apontou para o lugar abaixo do retângulo e solicitou que o Aluno E, mentalmente, "fechasse" a figura.

Sem entender o que o Aluno G diz por "fechar", o Aluno E perguntou o que ele deveria fazer. O Aluno G pegou uma folha papel, e, com as mãos, fez o formato do círculo embaixo, depois fechou a folha em forma do cilindro e mostrou com a mão o fundo da figura, como temos representado na Figura 48.

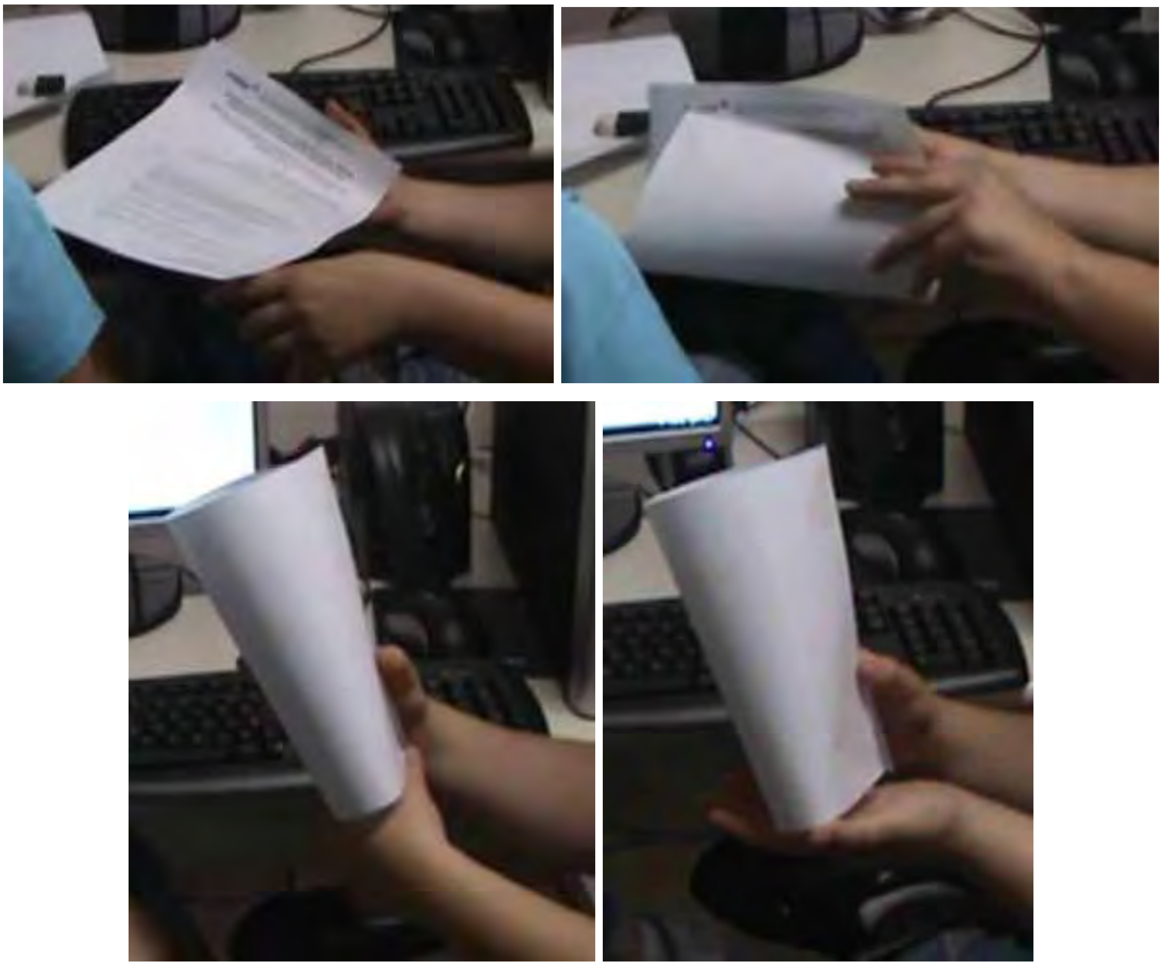


Figura 48: Folha de papel como um recurso para representação do cilindro

Os dois Alunos concordaram que essa seria a representação planificada do Objeto presente na Figura 48, e passaram, depois disso, a discutir outras questões.

As formas como os Alunos representaram uma figura, seja por meio de gestos, fala ou por meio do desenho no papel, foram diferentes na medida em que consideramos que cada Aluno visualizou a figura de modo diferente. Podemos notar que o Aluno E percebeu de forma diferente do Aluno G – ambos Interpretantes – isto é, o formato da figura - Objeto Dinâmico – foi constituído de maneira diferente por cada Aluno.

Assim, constatamos que quando os dois Alunos precisavam fazer a representação de um Objeto, o fizeram de forma diferenciada. Dado pelos conceitos matemáticos presentes nos livros de ensino fundamental, ensino médio e ensino superior, consideramos que as experiências anteriores vivenciadas pelo Aluno G possibilitaram a planificação do Objeto representativo da figura escolhida de forma ágil e correta, sendo feita nas diversas linguagens, ou seja, por meio de gestos, fala e desenho em papel.

Porém, o Aluno E não conseguiu fazer a representação de modo correto, como temos inicialmente, e recorreu ao Aluno G, que buscou formas de explicá-lo por meio das linguagens, de modo que o Aluno E pudesse visualizar o Objeto presente na figura por diversas representações. Esse modo de percepção do Objeto faz-se importante, visto que

> [...] a visualização exige descrição e comparação das formas geométricas, resgatando as suas semelhanças e diferenças: isso possibilita a construção da imagem mental, levando o Aluno a pensar no Objeto geométrico, na sua ausência. (FARIAS, 2007, p. 107)

Apesar de não podermos afirmar que o Aluno E visualizou de uma outra forma o Objeto representado pela Figura 24, temos que o Aluno E – Interpretante – em contato com a imagem da Figura 48 e outros elementos tais como, o Aluno G, o papel, o ambiente, as experiências, reformulou o signo, pois, corroborando com Peirce (2008, p. 74), temos que um signo (Representamen) transforma-se em outro signo quando conduz alguma coisa (interpretante), o transformando, ao referir-se a um Objeto de modo idêntico a ele.

Nessa Análise Semiótica, prosseguindo pela **Atividade Exploratório-Investigativa 4:** “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução” também encontramos alguns excertos qualitativos referentes aos Processos de Visualização dos entes Geométricos. Como foi exposto neste momento, iniciamos a Atividade Exploratório-Investigativa 4 explicando para os Alunos, como ela deveria ser seguida. O trabalho com reproduções de obras de arte seria repetido e os Alunos poderiam utilizar as figuras já obtidas na Atividade Exploratório-Investigativa 3 para prosseguir na atividade atual. A pesquisadora ressaltou a importância de utilizar o *software* e o material manipulável presente no laboratório, como também a cartolina.

Durante essa Atividade Exploratório-Investigativa 4, um Aluno a desenvolveu sozinho, pois, por motivo de ausência do outro participante, a dupla não foi formada. Mas mantivemos a dupla de Alunos N e J como na atividade anterior. Entretanto, buscamos desenvolver a Atividade Exploratório-Investigativa 4 em outro horário para a participação do

Aluno que havia faltado, mas, por falta de tempo dele disponível, isso não foi feito. Como discutiremos, dessa Atividade Exploratório-Investigativa 4, pudemos selecionar um excerto qualitativo significativo para a análise dos dados desta categoria da pesquisa.

Excerto 4: Como pudemos ver no Excerto 3, os Alunos E e G buscaram representar a planificação do sólido representado na Figura 24. Nas questões da Atividade Exploratório-Investigativa 4, o grupo de Alunos, formado por uma dupla e um Aluno trabalhando de forma individual, escolheram trabalhar a mesma figura no prosseguimento das Atividades Exploratório-Investigativas.

Porém, notamos uma diferença significativa durante o desenvolvimento das questões quanto à forma que os Alunos visualizaram o sólido. Enquanto o Aluno E considerava a figura como um cilindro, os Alunos J e N a consideravam como um tronco de cone, como percebemos a partir de seus relatos.

No desenvolvimento da Atividade Exploratório-Investigativa pelo Aluno E, ele relatou que a figura escolhida por ele assemelhava-se ao sólido cilindro, e disse que para representá-lo, ele precisaria cortar um retângulo na cartolina e torcê-la, como podemos ver na Figura 49.

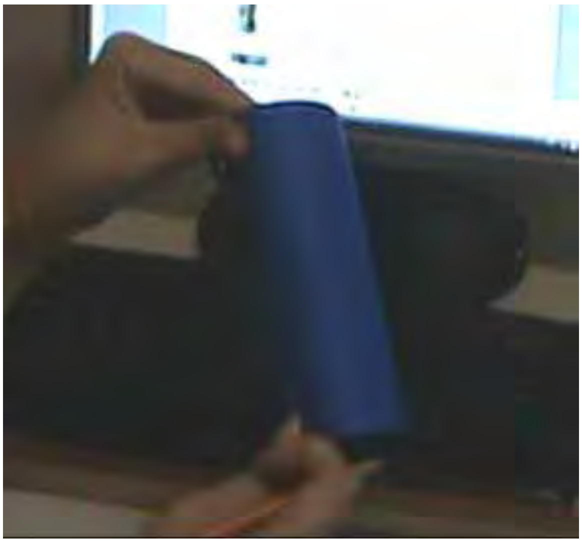


Figura 49: Cartolina como recurso de representação do cilindro

O Aluno E continuou explicando os outros elementos que foram visualizados por ele na Figura 50 - mesmo aqueles elementos que consideramos estar implícitos à visualização da figura - e concluiu: “embaixo eu fiz uma circunferência, aí tem que colar, né? [...] E está aberto em cima...”

Figura 50: Cartolina utilizada na representação da lateral e fundo do objeto

Porém, esse modo de percepção do Aluno E diferenciou-se dos Alunos N e J, pois, com um pedaço de cartolina na mão, mostraram representar diferentemente o mesmo Objeto que acabamos de nos referir. Como notamos, os Alunos N e J trabalharam com a cartolina buscando apresentar o diâmetro menor na parte debaixo e diâmetro maior na parte de cima, mas perceberam que ao fazerem isso, ao cortarem a cartolina em um retângulo, sobra cartolina na parte de cima, como podemos ver na Figura 51.

Figura 51: Tentativa de utilização da cartolina como instrumento para representação do tronco de cone

O Aluno N relatou que essa representação sugere que o valor do diâmetro era maior na parte superior, ao contrário do que eles haviam feito para a Figura 52, na qual haviam conseguido fazer a representação, facilmente, apenas cortando a cartolina na forma de um retângulo.

Figura 52: Copo de bebidas, imagem disponibilizada na Internet

Então, a pesquisadora perguntou aos Alunos porque a representação da Figura 24[38] não seria um cilindro, e o Aluno N respondeu que o diâmetro do copo aumenta na parte de cima. Os Alunos relataram que gostariam de fazer um cilindro para representar a parte inferior da figura e um tronco de cone para a parte superior. A pesquisadora orienta-os a fazer duas representações separadas, para, em seguida, fazer a união e formar o sólido desejado.

Os Alunos, dessa forma, retomaram à cartolina para representar o tronco de cone. Aluno J questionou o Aluno N, como seria um tronco de cone planificado. Para isso, eles tentaram imaginar a planificação do cone, e dessa forma eles o fizeram imaginando que a planificação do cone seria um triângulo isósceles. Eles cortaram um triângulo na cartolina mas não conseguiram montar o sólido desejado.

Nesse momento, a pesquisadora retomou a ajuda aos Alunos para desenvolverem, juntos, o ponto da questão em que eles não estavam conseguindo realizar sozinhos. A pesquisadora teve a ideia de auxiliá-los buscando comparar o cálculo da área lateral do cone com a representação que eles estavam elaborando. Então, ela perguntou se os Alunos J e N se lembravam de como é calculada a área lateral do cone e o Aluno J explicitou que seria algo como "o comprimento da ciurcunferência vezes a geratriz." A pesquisadora perguntou em qual figura planificada que representamos uma geratriz, fazendo para isso o esboço do cone. Após isso, a pesquisadora perguntou qual o elemento que nesse cone (Figura 53) representava

---

38 

a geratriz. O Aluno J disse que era a linha lateral que costumamos desenhar no esboço do cone, e, ao final, concluiu que por todo o cone poderíamos apontar uma geratriz.

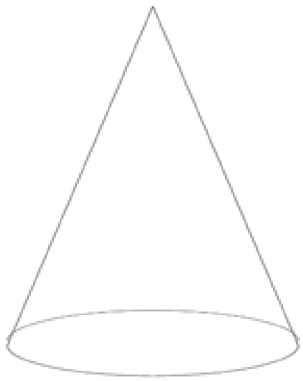


Figura 53: Cone

Então o Aluno N interrompeu dizendo que as “geratrizes” no triângulo não tinham a mesma medida, como no exemplo do cone, em que todas as “geratrizes” deveriam ter a mesma medida. Isso permitiu a ele concluir então que: “Por isso não é um triângulo, vai arredondando, né?”

A pesquisadora continuou a interação com os Alunos perguntando qual era a figura formada, e o Aluno N disse que seria uma “coisa” na circunferência. Para concluirem que seria mesmo uma “coisa” da circunferência, a pesquisadora solicitou que os Alunos tentassem representar na cartolina. Os alunos N e J fizeram a representação na cartolina, recortando um setor de círculo. Eles testemunharam que seria essa planificação e apresentaram o resultado final, sendo o sólido representado pela Figura 54.

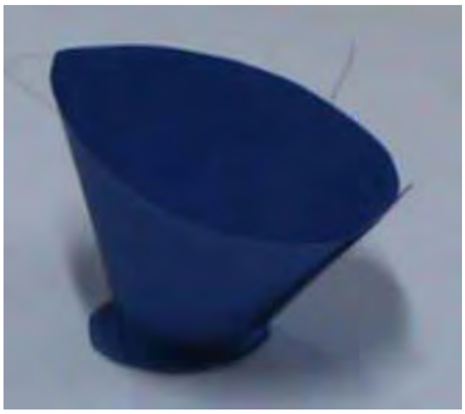


Figura 54: Representação um tronco de cone utilizando a cartolina

Nesse excerto, pudemos notar a importância da visualização para o processo de representação dos conceitos matemáticos, ou seja, como o modo de perceber uma figura pode ser diferenciado pelos Alunos – Interpretantes.

Para entendermos como se dá essa análise pelas categorias da Semiótica de Peirce (2008), consideramos que o Objeto Imediato é a qualidade material da representação, é a aparência do copo de bebidas representado pela Figura 54, tal como ela é visualizada pelo Interpretante. Como Interpretante Imediato, temos as interpretações naturais dadas pelos Alunos ao observarem o Objeto, o qual é substituído por diversas interpretações de cada Aluno quanto à Figura 54, selecionada nesse caso, pelos Alunos E, N e J. Eles observaram as figuras selecionadas por eles nos sites da Internet e ao buscar as relações dessas figuras com as figuras matemáticas, já podemos considerá-los como Interpretantes Dinâmicos. A interpretação individual que expomos, segundo Santaella (2007, p. 60) explicita como a forma com a qual o signo produz o Interpretante Dinâmico depende da natureza do signo e do seu potencial. E essa relação refere-se diretamente ao Objeto Dinâmico, o qual faz menção aos conhecimentos prévios que os Alunos possuem, por meio das quais podem estabelecer relação entre uma figura selecionada e os sólidos que já conhecem.

Sabendo que o signo também é um conjunto formado por os Interpretantes Finais, consideramos que cada Aluno, ao final da Atividade Exploratório-Investigativa 4, constituiria em um novo signo. Assim, avaliamos que o Aluno E fez novas relações da Figura 50[39] com o cilindro, e os Alunos J e N, mesmo trabalhando na relação com o tronco de cone, fazendo a mesma relação de semelhança com as figuras matemáticas iguais, constituíram novos signos, diferentes do anterior. Corroborando com as ideias de Hildebrand (2001, p.105) podemos notar como as imagens vêm "ajudando o homem a raciocinar e representar o mundo ao seu redor", mesmo que cada um o faça de modo diferente, notamos o potencial dos Alunos em utilizar-se dos conhecimentos anteriores para o desenvolvimento de novos conhecimentos.

Assim, temos que os signos sempre permitem vários tipos de interpretação extraídos a partir deles mesmos. Tal interpretação nunca é esgotada pelo Interpretante que trabalha com a Figura 24[40] e traça suas próprias relações.

---

39 

40 

Veremos, em seguida, situações próximas aos episódios descritos e analisados anteriormente, nos dois excertos selecionados, os quais encontramos na **Atividade Exploratório-Investigativa 5:** “Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelangelo”.

As questões presentes na Atividade Exploratório-Investigativa 5, restringirão o trabalho com as representações das obras de arte, do Renascimento Italiano, Leonardo da Vinci e Michelangelo. Foram sugeridos aos Alunos quatro sites de consulta às referidas obras desses artistas, ressaltando um livro virtual que reúne e organiza um pouco do trabalho deles, como temos na Figura 55.

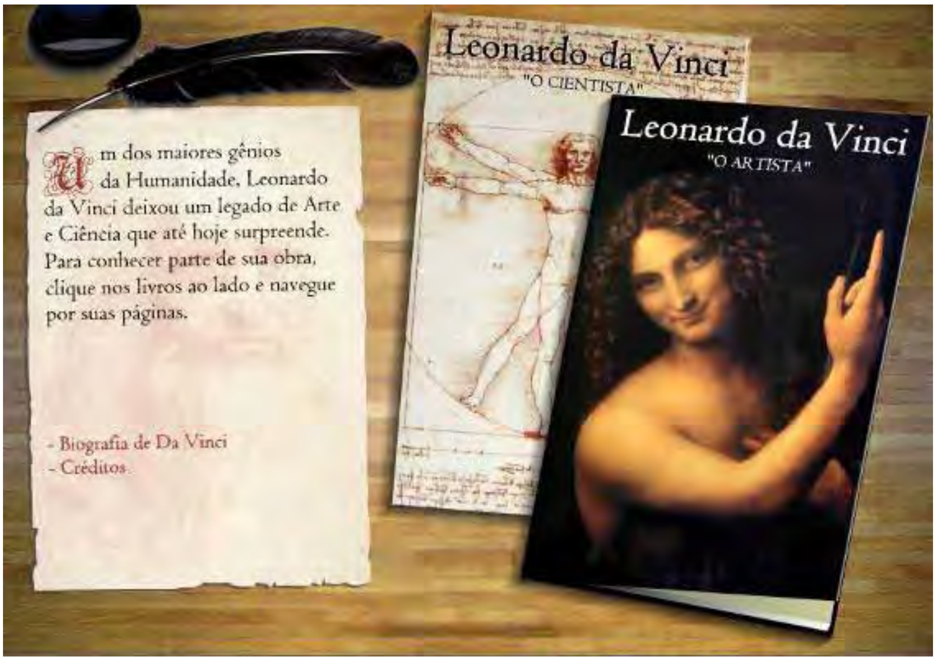


Figura 55: Imagem do site com exposição das obras artísticas de Leonardo da Vinci[41]

Sobre Leonardo da Vinci, podemos dizer que:

> [...] foi um dos mais notáveis pintores do Renascimento e possivelmente seu maior gênio por ser também anatomista, engenheiro, matemático músico, naturalista, arquiteto e escultor. (PORTAL DE HISTÓRIA E CULTURA: VIDA DE DA VINCI, 2005) Este pintor empregou as técnicas da perspectiva, desenvolvida pelo arquiteto toscano Filippo Brunelleschi. Como melhor exemplo de criação, encontra-se a *Última Ceia.* Na *Ceia,* dentro do universo de rigorosa geometria, Leonardo esculpiu um arrebatador jogo de expressões e movimentos entre Cristo e seus apóstolos. (QUADROS, 2007 apud GOUVEIA, 2007, p.6).

[41] http://www.universia.com.br/especiais/davinci/

Um aspecto que destacaremos nessas obras, pelo que pudemos notar, é o fato de esses artistas não pintarem ou esculprem Objetos de formas geométricas “mais simples”, como as imagens escolhidas pelos Alunos na Atividade Exploratório-Investigativa 3. Consideramos que para esses Alunos, tornou-se um trabalho maior, por terem que conhecer melhor as obras, e posteriormente encontrarem representações de sólidos de revolução para inserirem nas atividades que são realizadas. Como observamos, os Alunos retornaram ao trabalho desses artistas diversas vezes para encontrarem um Objeto que representasse um sólido de revolução representativo.

Eles também poderiam consultar as obras em outros sites e foi solicitado que não repetissem as imagens da Atividade Exploratório-Investigativa 4. Durante essa Atividade Exploratório-Investigativa, os Alunos formaram duas duplas, como foi organizado na Atividade Exploratório-Investigativa 3.

De tal forma feita para as Atividades Exploratório-Investigativas, selecionamos alguns excertos que condizem com nosso objetivo de pesquisa e apresentamos em seguida.

Excerto 5: Neste excerto, temos que os Alunos – Interpretantes – iniciam a Questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 5: “Vocês poderiam identificar alguma superfície e sólido de revolução nas obras desses dois Artistas Famosos –Leonardo da Vinci e Michelangelo? Explicitem as suas ideias?”, selecionando uma obra arquitetônica de Leonardo da Vinci “Domo de São Peter, Basílica de São Pedro, Vaticano, 1564” (Figura 56) e a obra “templo centralizado” de Leonardo da Vinci (Figura 21[42]) com o objetivo de representar, de modo semelhante, uma dessas obras no *software*. Já a princípio, podemos notar uma semelhança nas duas imagens, semelhanças essas que se refletirão na proposta dos Alunos.

42 

Figura 56: Domo de São Peter, Basílica de São Pedro, Vaticano, 1564

Como temos nesta questão desenvolvida pelos Alunos E e G, o primeiro momento consistia na leitura do enunciado da Atividade Exploratório-Investigativa 5: “*Vocês poderiam identificar alguma superfície e sólido de revolução nas obras desses dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelangelo? Explicite as suas ideias?”*

Em seguida, tivemos uma discussão entre os Alunos. O Aluno E disse para o Aluno G, que considerava a obra escolhida por eles, como a representação de um Sólido de Revolução: “Ela parece aquela coisa pra baixo... parece o parabolóide de alguma coisa... Posso desenhar assim?” (Figura 57). Ele esboçou no papel a referida representação e perguntou ao Aluno G, se ele havia compreendido o modo como ele, o Aluno E, havia esboçado a figura e explicita: “Tipo, tem um que é só pra cima, ou só pra baixo, ou um que são dois, um pra cima e pra baixo.”

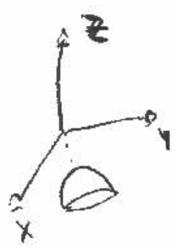


Figura 57: Esboço do parabolóide pelos Alunos E e G

É nesse exato momento que notamos que o Objeto Imediato, o qual consideramos ser a figura que os Alunos selecionaram, tendenciou a tornar-se Objeto Dinâmico, visto que os Alunos – Interpretantes - utilizaram-se dos seus elementos matemáticos para tecer relações de semelhança com outros Objetos matemáticos.

Assim, na tentativa de fazerem a representação no *software*, os Alunos E e G testaram algumas expressões, tais como $x^2+y^2-z^2-1$ (Figura 58).

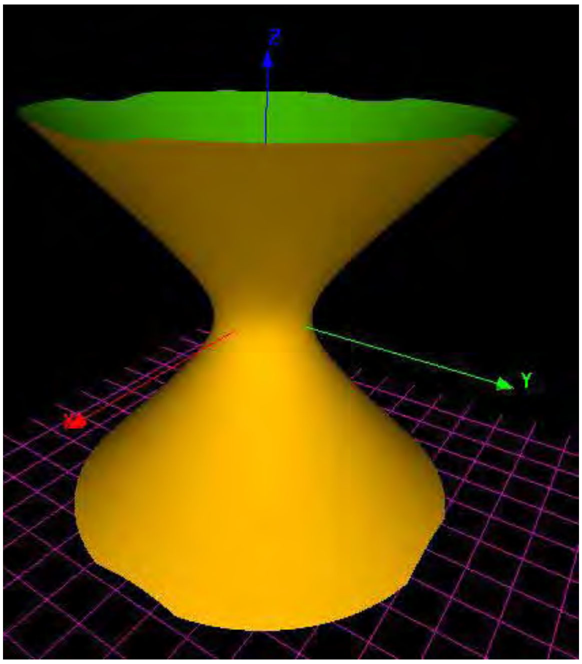


Figura 58: Representação no *software* K3DSurf da expressão $x^2+y^2-z^2-1$

Ao obterem esse resultado, os Alunos E e G utilizaram a função CUT GRID para limitar os valores de z, como temos na Figura 59.

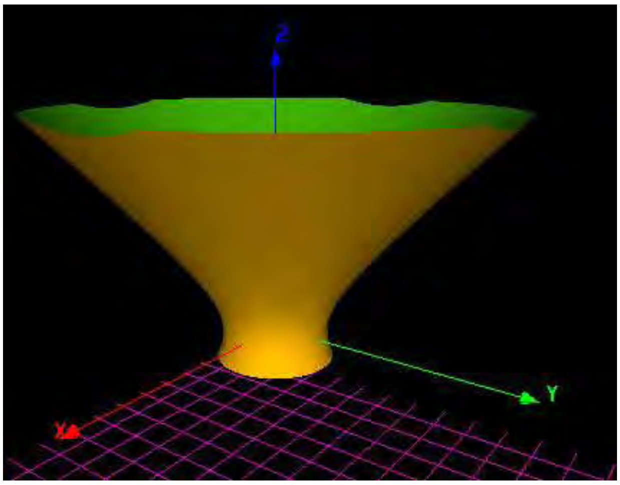


Figura 59: Representação no *software* K3DSurf da expressão $x^2+y^2-z^2-1$ usando a função CUT GRID

Entretanto, essa representação, ao ser comparada com a obra de Leonardo da Vinci, selecionada pelos Alunos E e G, não se apresentou semelhante e, então, o Aluno G sugeriu que eles mudassem o valor de y na expressão, ficando com: $x^2-y^2-z^2-1$. Dessa expressão, obtiveram a representação no *software*, dada pela Figura 60.

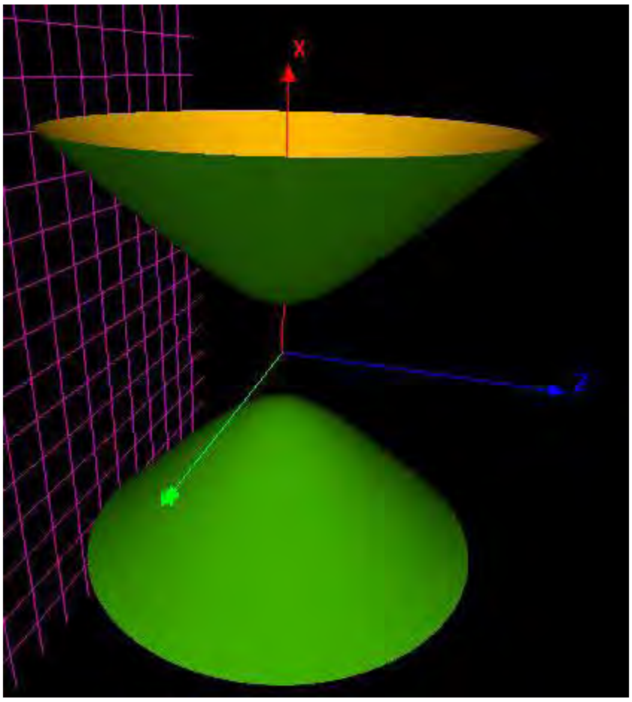


Figura 60: Representação no software K3DSurf da expressão x^2-y^2-z^2-1

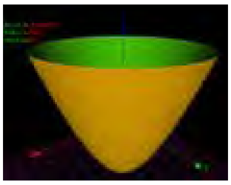
O Aluno E considerou que a figura anterior (Figura 59) era mais parecida, e buscou testar outras expressões, como: x^2+y^2-z. Ao perceber o resultado da representação (Figura 44[43]), consideramos que ele supôs essa seria mais parecida com o objeto selecionado.

O Aluno G concordou que as duas representações (Obra de Leonardo da Vinci e Figura 59) eram parecidas e considerou essa representação no *software* como um dos resultados para a questão que estava sendo desenvolvida.

Para nós, essa associação das figuras das obras artísticas, dos esboços feitos pelos Alunos e da sua referida representação no *software* por meio de expressões matemáticas, torna-se importante por concebemos que

> [...] a forma visual de um signo associada a um conceito é extremamente relevante na definição da notação, principalmente em Matemática. Um símbolo matemático deve possuir uma propriedade de dizer visualmente qual é o seu conteúdo conceitual, isto é, deve carregar em sua imagem a qualidade de representar o que ele substitui. (HILDEBRAND, 2001, p.110)

Analogias feitas a todo momento, como podemos notar pelo trabalho dos Alunos E e G, dado pela representação arquitetônica de um espaço real em representações de imagens virtuais, carregam relações matemáticas. Esse episódio tende a contribuir, como Garcia

43 

(2007) argumenta, no desenvolvimento de conceitos matemáticos, pois atribuem significado matemático ao signo que representa tal conceito próprio da sua representação.

Excerto 6: Mudando nosso foco de análise, apresentamos o último excerto dessa categoria, que se diferencia dos outros por atrelar-se ao conceito de sólido de revolução. Em nenhum momento apresentamos uma questão que estivesse relacionada diretamente com a forma como os Alunos entendiam o conceito de sólido de revolução. Podemos notar que, esse conceito apresentou-se somente de modo subjetivo, como requisito para o desenvolvimento de uma questão genérica. Assim, durante a questão 3: *"Como vocês poderiam calcular a área dessas superfícies de revolução?",* abriu-se uma discussão sobre o conceito de Sólido de Revolução, gerada pela pesquisadora e Alunos, dada por meio de elementos da visualização.

Essa ocasião deu-se quando a pesquisadora percebeu que os Alunos E e G, selecionaram apenas parabolóides das obras de arte para representarem no *software*, como pudemos perceber no Excerto 5 que acabamos de apresentar. Desse modo, a pesquisadora perguntou aos Alunos E e G qual seria outra representação de uma superfície de revolução ou sólido de revolução que eles poderiam exemplificar.

Em meio aos relatos desses Alunos, tivemos o momento em que o Aluno G disse não saber o que são sólidos de revolução. Porém, a pesquisadora, observando o desenvolvimento de todas as Atividades Exploratório-Investigativas até aquele momento, compreendeu que os Alunos apenas não sabiam definir, com palavras, o conceito explorado, mas que poderiam identificar os sólidos de revolução por meio de outras figuras.

O Aluno E interagiu com a pesquisadora respondendo que os sólidos de revolução são figuras que ele poderia "girar" em torno de um eixo. Então, ela fez o esboço do sólido de revolução, que foi exemplificado por eles, representado sob os três eixos coordenados nomeados x, y e z e indagou aos Alunos onde estaria o eixo de revolução do sólido naquele exemplo. O Aluno E disse que seriam os eixos x, y, z, mas o Aluno G, no mesmo instante, discordou da resposta do colega e disse que seria apenas o eixo z. A pesquisadora concordou com o Aluno G e perguntou se haveria outro elemento que caracterizaria o sólido como um sólido de revolução. O Aluno E disse ser uma superfície, que ao girar no eixo, formaria o sólido.

Mesmo com a descrição desse breve episódio, consideramos que podemos elucidá-lo segundo a Teoria Semiótica de Peirce (2008). Notamos que os Alunos – Interpretantes – ao buscarem conceituar o elemento matemático sólido de revolução, em um primeiro momento, não o consideraram como signo, pois "não conseguiram, ao apreenderem as qualidades dos

Objetos, identificarem as suas propriedades. Eles só 'tinham' as imagens mentais dos Objetos." (GARCIA, 2007, p. 120)

Em um segundo momento, com a intervenção da pesquisadora, notamos que os Alunos E e G passaram a considerar o elemento matemático como um signo. E podemos especificar esse momento perante à Primeiridade, Secundidade e Terceiridade pertencentes à Teoria Semiótica. Temos que em Primeiridade, os Alunos observaram o signo pelas suas qualidades, a qual se constituiu da imagem mental. Já em Secundidade, os Alunos relacionaram o conceito a outras linguagens, como foi o propósito da pesquisadora ao solicitar que os Alunos definissem sólido de revolução. Assim, os Alunos puderam indicar um outro aspecto com o qual o signo estava ligado, como define Santaella (2007), o que permitiu concretizar as imagens visuais, ou seja, representar um Objeto por meio de exemplos de figuras, gestos e palavras e não por meio de somente palavras. Por fim, em Terceiridade temos o processo de interpretação e significação do conceito matemático, o qual é feito pela associação do conceito às imagens mentais e visuais. (GARCIA, 2007). Assim, notamos que o conceito que os Alunos E e G disseram não saber, foi apresentado pelos próprios Alunos por meio de outros elementos de linguagem que admitem um novo processo de significação do conceito, constituindo um novo signo.

Após a apresentação desse excerto, prosseguimos para o nosso último momento de Análise Semiótica que realizamos nessa pesquisa, refere-se às categorias denominadas: *Processos de Representação dos Entes Geométricos e Processos de Re-significação dos Conceitos Algébricos*.

5.3. PROCESSOS DE REPRESENTAÇÃO DOS ENTES GEOMÉTRICOS E PROCESSOS DE RE-SIGNIFICAÇÃO DOS CONCEITOS ALGÉBRICOS

Os Processos de Representação dos Entes Geométricos e os Processos de Re-significação dos Conceitos Algébricos, segundo a Teoria Semiótica de Peirce (2008), referem-se à Terceiridade, pois buscam compreender o trabalho realizado pelos sujeitos da pesquisa quanto à utilização das ferramentas régua, lápis ou outros elementos, como também aspectos intuitivos para **representação** da imagem selecionada nos sites durante as Atividades Exploratório-Investigativas. Além disso, ainda na perspectiva da Terceiridade, os *Processos de Re-significação dos Conceitos Algébricos* referem-se aos conhecimentos desenvolvidos e presentes pela forma como as **funções matemáticas** podem ser representadas no plano e no espaço.

Acreditamos que este processo de realizar uma “simples” cópia da imagem, apresenta relações geométricas implícitas, tais como conceitos de posição de retas e pontos relativos aos aspectos de perspectiva e de projeção.

Em questões do tipo “Represente esses sólidos <u>no papel, material manipulável (quando possível)</u> e no *software*.”, encontradas nas Atividades Exploratório-Investigativas 4 e 5 intituladas “Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*” e “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução”, respectivamente, tivemos momentos que requereram dos Alunos, conhecimentos geométricos prévios e o desenvolvimento desses conhecimentos desenvolvidas as Atividades Exploratório-Investigativas.

Um segundo aspecto, refere-se aos sujeitos da pesquisa quando trabalham com a representação no *software* nas Atividades Exploratório-Investigativas 3, 4 e 5, intituladas “Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*”, “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução” e “Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Pintores Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo”, respectivamente.

Dessa forma, buscando organizar os dois momentos dados nessa categoria, faremos, inicialmente, uma primeira seleção dos excertos, constituída das Atividades Exploratório-Investigativas dada pela representação por meio de Objetos manipulativos.

Excerto 1: Durante o desenvolvimento da **Atividade Exploratório-Investigativa 4:** “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução”, o primeiro episódio que nos chamou atenção, quanto aos aspectos referentes a esta categoria, deu-se no momento em que os Alunos N e J tentaram representar as figuras selecionadas por eles em um mateiral concreto, nesse caso, por meio da cartolina. Eles realizaram o trabalho de cortar um pedaço da cartolina no formato de um retângulo e uniram duas laterais opostas formando um cilindro.

Podemos perceber que os momentos de visualização e representação estiveram sempre atrelados ao contexto das Atividades Exploratório-Investigativas abordadas, e, como relatamos algumas vezes na análise da categoria anterior, os Alunos buscaram fazer relações de semelhança entre as figuras. Porém, nesse momento, focamos nossa atenção aos elementos utilizados pelos Alunos N e J, no que se refere ao modo como eles buscaram representar os sólidos.

Durante o desenvolvimento dessa Atividade Exploratório-Investigativa 4, o Aluno N, apontou para o copo representado pela Figura 24 e fez com as mãos o formato de um cilindro, mostrando que ela poderia ser a representação desse sólido. Ele também admitiu que o abajour representado pela Figura 61 também poderia ser semelhante ao cilindro, quanto à sua representação.

Figura 61: Abajour, imagem disponibilizada na Internet

Entretanto, o Aluno J perguntou ao Aluno N como eles fariam aquela representação, já que a parte a parte de baixo do “abajour” (“o pé”) não era “certinha”. Ele indicou, então, que mudassem a figura escolhida e que fizessem a representaçao da Figura 62.

Figura 62: Moringa, imagem disponibilizada na Internet

Os Alunos tentaram pensar nas três figuras ao mesmo tempo, mas apoiaram-se mais na representação da Figura 62. O Aluno N, imaginando como representariam essa figura com a cartolina disse: “Teria que amassar ele, né?” e o Aluno J concordou. Ao fazerem esse processo, o Aluno N perguntou ao Aluno J como eles amassariam e o Aluno N supôs que eles teriam que utilizar a técnica de emendar tiras de cartolina.

Em meio a esse processo, observamos que os Alunos N e J tentaram fazer a representação planificada de figura, para depois formarem o sólido. Para isso, fizeram o esboço do retângulo e perceberam que eles tinham representado uma possível formação da Figura 62.

Então, o Aluno J declarou que, para a Figura 62, eles deveriam fazer um “retângulo com as laterias curvas”. Assim eles o fizeram mas viram que não consistia na forma da figura desejada. Dessa maneira eles relataram que, com a cartolina, não seria possível fazer uma representação da Figura 62, sem que fossem emendados várias tiras de cartolina, ou seja, fossem considerados um “conjunto de sólidos” que seriam unidos para formar uma só figura.

Excerto 2: Continuando a discussão iniciada no excerto anterior, temos o prosseguimento de uma discussão apresentada no Excerto 4 da Categoria de Análise 2, intitulada Processos de Visualização dos Entes Geométricos, na qual explicitamos algumas relações sobre a visualização das figuras. Porém, o foco nesse momento, refiria-se à tentativa dos Alunos N e J, de fazer a representação do tronco de cone na cartolina, na qual eles pegaram o cone formado e, com a tesoura, tiraram o "bico do cone" dobrando-o e fazendo um corte reto.

Como notamos, o Aluno J percebeu intantaneamente, que a representação na cartolina "Não parece um tronco não...", pois a parte cortada foi feita de modo errôneo. Então, o Aluno N sugeriu que o corte fosse refeito e o Aluno J recortou o centro de forma arredondada.

Com o resultado encontrado, os Alunos J e N perceberam que a representação não estava muito semelhante por conta das medidas, mas consideraram a referida representação na cartolina, pois condizia com o que eles gostariam de representar (Figura 54[44]).

Assim, concluído a representação da Figura 54, o Aluno N questionou uma próxima figura (Figura 63).

Figura 63: Vaso 2, imagem disponibilizada na Internet

O Aluno J atesta que sua dupla deveria fazer a representação como no caso anterior, sendo, nesse exemplo, formado por dois troncos, ou seja, fazendo dois Objetos e unindo-os, em que o primeiro seria um tronco de cone com a parte superior com o diâmetro menor, e o segundo, que se encaixaria abaixo, teria o tronco do cone com a parte superior com o diâmetro maior (a seta divide a Figura 64 em dois troncos).

Figura 64: Apontamento do eixo (seta) que divide o "Vaso 2" em duas representações de troncos de cone

O Aluno N fez com gestos para indicar como seria o primeiro e o segundo tronco (Figura 65), sendo esta mais uma forma de mostrar para o Aluno J como ele entendia que ficaria a representação na cartolina.

44 

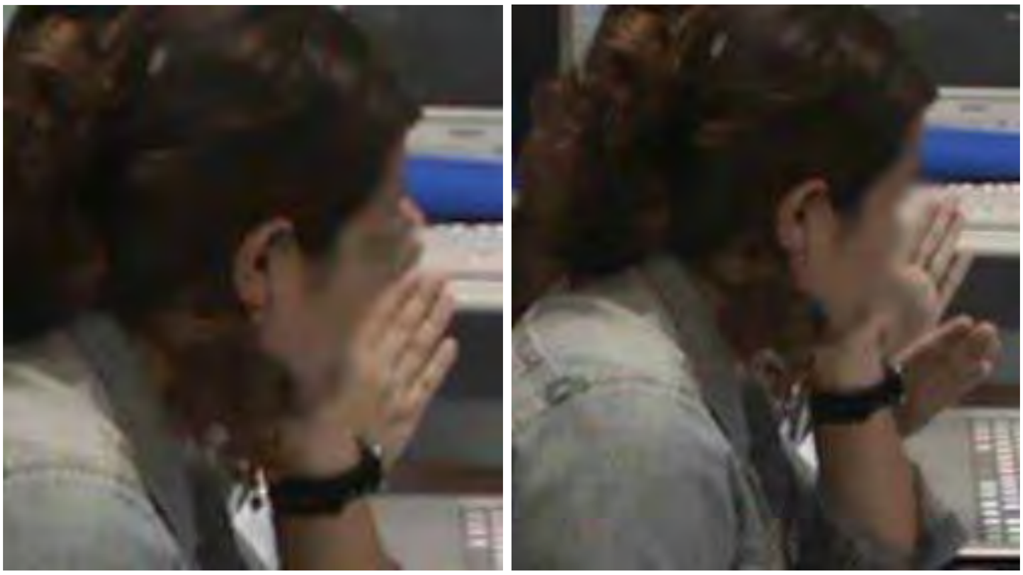


Figura 65: Representação gestual do tronco de cone: primeiro momento com a base maior para baixo e o segundo momento representando a base maior para cima

Os Alunos não fizeram essa representação com a cartolina e seguiram a Atividade Exploratório-Investigativa 4 fazendo a representação da Figura 66, por meio de um dos sólidos feito em madeira, que disponibilizamos no armário do LEM, ambiente em que estávamos.

Figura 66: Objeto real e sua respectiva representação com material manipulativo

Dessa forma, nos dois excertos apresentados, pudemos notar que a Teoria Semiótica se fez presente na relação que os Alunos – Interpretantes - estabeleceram com a figura, sua representação como sólido matemático e sua possível representação no material manipulável. Percebemos que os Alunos utilizaram-se de várias representações para a interpretação dessas figuras, e esse desenvolvimento pode se identificado segundo as três categorias propostas por Peirce (2008).

Assim, a Primeiridade faz-se presente nesse contexto, quando os Alunos consideraram a figura como uma provável representação de um Objeto matemático, ou seja, "nenhuma outra coisa senão pura qualidade de ser e de sentir" (SANTAELLA, 2007, p. 43). Em um segundo momento dessa relação teórica, o qual Peirce (2008) nomeou de Secundidade, temos as relações estabelecidas principalmente por meio de gestos, que auxiliam os Alunos a pensar numa representação com objetos manipuláveis, como também por Objetos matemáticos conhecidos, tal como o cilindro, que foi utilizado como base no desenvolvimento dessas representações.

Como abordam Miskulin et al (2007) essas formas de representação que auxiliam no desenvolvimento da Atividade Exploratório-Investigativa

> [...] garante ao sujeito a possibilidade de refletir sobre os objetivos e meios com os quais atua. Na resolução de problemas identifica-se uma mobilidade crescente de representações. Tal qualidade parece estar assegurada por um funcionamento intermodal, isto é, por uma tradução de representações de uma modalidade para outra. (MISKULIN ET AL, 2007, p. 8)

Isso possibilita o desenvolvimento do fenômeno para o nível de Terceiridade, no qual temos a reorganização das ideias que vêm, posteriormente, conferir uma nova interpretação à figura, ou seja, um novo modo de entendê-la. Como advém dessa teoria, isso significa a constituição de um novo signo dado de forma diferenciado por cada Aluno envolvido nesse processo. Os Alunos perceberam que fazer a representação da Figura 66 por meio do material manipulativo, como a cartolina, seria possível, mas não mostraria um resultado próximo à visualização real. Entretanto, temos que outras figuras, tais como as Figuras 24[45] e 63[46], puderam ser representadas de forma bem análoga pela cartolina. Notamos também, que os Alunos conseguiram utilizar os elementos que disponibilizamos no armário do LEM, tal como os sólidos feitos com outros tipos de material no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas.

Excerto 3: No terceiro excerto dessa categoria de análise, descrevemos uma passagem ocorrida na Atividade 5: "Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo", na qual a pesquisadora procurou explicitar os elementos matemáticos dos sólidos de revolução, para os Alunos E e G, por meio da representação do cilindro. Ela esboçou um cilindro no papel, e

---

45 

46 

perguntou qual seria o eixo de revolução desta figura, ressaltando que se fosse considerado um eixo, deveríamos pensar que alguma coisa vai girar em torno dele.

Semelhante a um excerto apresentado anteriormente, temos que nesse caso, o encaminhamento foi feito de forma diferente. Dessa forma, tivemos que o Aluno E apontou para um eixo da figura, correspondendo ao que a pesquisadora havia perguntado e se dispôs a pensar qual seria a figura que, ao girar nesse eixo, formaria o cilindro. Em seguida, o Aluno anunciou que se colocássemos vários círculos, um sobre o outro, poderíamos formar o cilindro esboçado. Porém, a pesquisadora ressaltou que essa seria uma outra forma de pensar na constituição da figura, mas que ao trabalharmos com sólidos de revolução, deveríamos pensar em uma figura plana, que ao girar em torno do eixo, formaria o cilindro.

O Aluno G, participando da discussão explicitou que para a formação do cilindro, poderíamos considerar o retângulo e ele, ao girar em torno do eixo, formaria um cilindro.

A Pesquisadora concordou com a resposta do Aluno G, mas interrogou aos Alunos, qual o elemento que poderia ser considerado, caso quiséssemos considerar apenas a superfície do cilindro.

O Aluno E respondeu que seria apenas a “linha do retângulo”, apontando com o dedo, para a linha que estava sendo considerada. A pesquisadora confirmou a resposta do Aluno E e ele, dando continuidade às Atividades Exploratório-Investigativas, retornou ao exercício buscando encontrar os elementos da figura escolhida (ver Figura 56[47]).

O Aluno E esboçou um semi-círculo considerando ser a representação do elemento que formaria a Figura 56, na parte superior. O Aluno G observou que devia ser considerada apenas a linha, e não o semi-círculo. Dessa forma, o Aluno E explicitou que poderia ser uma função matemática, e assim, prosseguiram no trabalho (explicitamos os momentos de desenvolvimento dos Alunos sobre função matemática de forma mais detalhada no próximo tópico desta terceira categoria de análise dos dados).

O que desejamos ressaltar neste momento refere-se aos elementos de representação, os quais consideramos complementares à fase de visualização e de percepção dos elementos da figura. Este corresponde a uma das diversas maneiras de compreendermos como os Alunos percebem e passam a representar o conhecimento deles.

---

47 

Segundo Fischbein (1993 apud Farias, 1997, p. 131) “um desenho não é uma figura geométrica ele próprio, mas um gráfico ou uma incorporação material, concreta, dela”. O que desejamos referenciar dá-se pela relação de dependência do conceito matemático da figura, conhecido previamente pelos Alunos, e a representação que esses Alunos são capazes de realizar para esboçar a imagem no papel.

Esse processo de representação auxilia na reconstrução da imagem mental, a qual foi trabalhada como signo, ao buscar representá-la concretamente, cada Aluno, que pode ser considerado um Interpretante, teceu relações conceituais e de propriedades figurais utilizando-se novamente da visualização. Podemos considerar que esse consiste em um processo cíclico, de resignificação do signo. Ressaltamos, então, os aspectos de dinamicidade e de evolução do signo, os quais estão sempre abertos a novas possibilidades de atualização (LAURENTIZ, 1999 apud HILDEBRAND, 2001).

Como estão presentes nesses excertos, os Alunos relataram os conhecimentos que foram requisitados deles para representação das figuras, seja por meio do esboço no papel seja pelo ensaio na montagem do sólido com a cartolina, pois pelo próprio relato dos Alunos, temos que “no papel conhecendo apenas seu formato é possível a construção dele”.

Essa situação ocorre porque ao solicitarmos as representações das imagens no *software*, observamos que outros conhecimentos foram ressaltados. Assim, quando os Alunos trabalharam com a representação no *software* K3DSurf, eles perceberam que “é necessário o conhecimento das equações de sólidos” (segundo as palavras do Aluno G), os quais, tal conhecimento não interferiu diretamente sobre as Atividades Exploratório-Investigativas que eram realizadas com material manipulável.

Assim, considerando também a importância da representação de elementos matemáticos por meio do *software* no desenvolvimento dos conhecimentos dos Alunos, apresentamos um segundo foco dado a essa categoria, relatando excertos retirados das Atividades Exploratório-Investigativas dados pela representação por meio do *software*, o qual utiliza-se de conhecimentos algébricos, ou seja, o conhecimento em Funções da forma Implícita (que estão equiparadas a zero) ou Funções da forma Paramétrica, para representar as imagens selecionadas pelos próprios Alunos, no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas.

O processo de teste de funções, permitido pela praticidade do *software,* também foi encontrado nos dados constituídos e foram analisados com base nos autores que trabalham com representação, visualização e Semiótica. Entendemos que essa abordagem na qual os Alunos tiveram que testar conjecturas que estivessem relacionadas à figura que desejavam explorar, é considerada por alguns autores da Educação Matemática, tais como Farias (2007), Garcia (2007), Hildebrand (2001), Miskulin et al (2007a), como um modo de desenvolvimento do conhecimento matemático e serão referenciadas, nesse sentido, para o prosseguimento de análise desse trabalho. Os dados que sobressaem nessa categoria foram colocados pelos Alunos, no desenvolvimento de questões, tais como: "Represente esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no *software*."

Apresentamos, neste momento, 5 excertos qualitativos que concebem nosso trabalho de pesquisa nesta categoria.

Excerto 4: A **Atividade Exploratório-Investigativa 3:** "Visualização com Objetos manipuláveis e com *software*" consiste na primeira situação que descrevemos sobre os Processos de Re-significação dos Conceitos Algébricos. Após um momento de manipulação livre do *software* K3DSurf, os Alunos iniciaram o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas. Os Alunos E e G inseriram expressões no programa disponibilizado pela pesquisadora. A primeira expressão que apresentaram foi sen(x), a qual, ao ser inserida no *software*, passou a se comportar como uma equação, quando qualquer expressão inserida no *software* K3DSurf era igualada a zero. A Figura 67 representa a função sen(x) = 0.

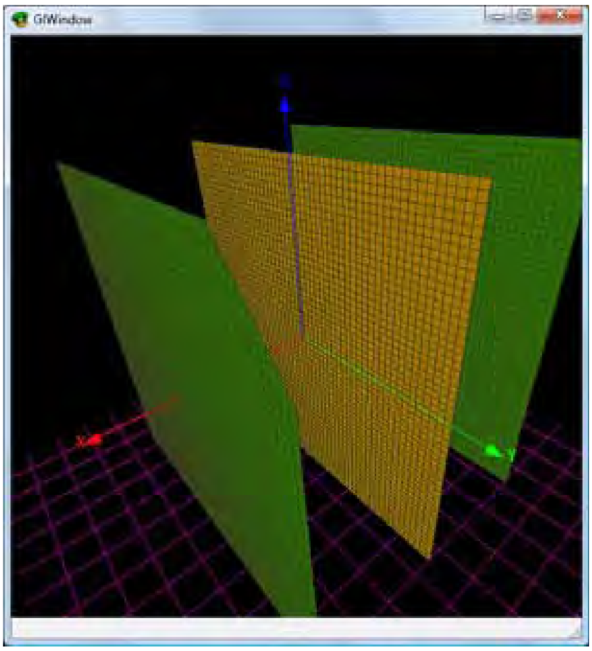


Figura 67: Representação no *software* K3DSurf da função sen(x) = 0

Sem entender o resultado encontrado, a pesquisadora questionou os Alunos sobre o resultado, mas eles não conseguiram encontrar uma resposta. Desse modo, ela retornou à apostila e lembrou os Alunos que a expressão, quando inserida no *software* era igualada a zero - como pode ser notado no texto presente sobre a janela na qual se inserem as expressões (Figura 68). Logo, a pesquisadora questionou o resultado encontrado sob essa condição.

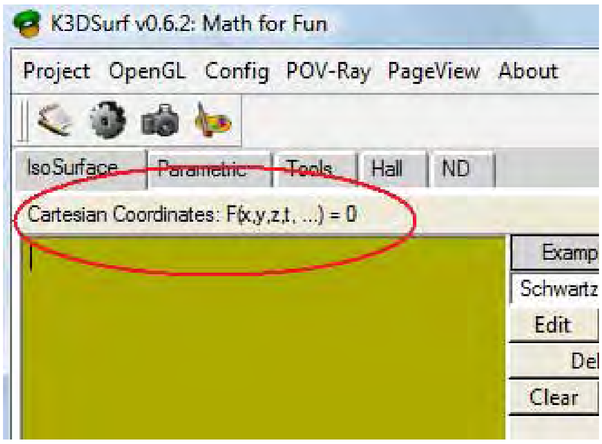


Figura 68: Modo como as funções devem ser inseridas no *software* K3DSurf

Ela, portanto, iniciou uma discussão com os Alunos E e G quanto ao modo como se concebe a representação no *software* K3DSurf, como ele manipula os conceitos matemáticos. A pesquisadora tentou relembrar alguns conceitos matemáticos sobre os tipos de nomenclatura das funções: “Quando a gente trabalha função seno, a gente trabalha y igual a seno de x” e continuou, explicitando que no caso do *software* tínhamos que os Alunos fizeram seno de x igual a zero.

O Aluno E disse para o Aluno G colocar a função, a qual eles haviam exemplificado, igual a y. Porém, a pesquisadora interferiu novamente na discussão apontando que não poderíamos colocar um sinal de igual no campo em que fosse inserida a expressão, pois o *software* já considera, em sua nomenclatura, a expressão inserida igual a zero. O Aluno G opinou que deveria, então, ser mudado o “igual a zero” para “igual a y” mas logo percebeu que esta estratégia não seria possível.

Observando que os Alunos E e G não conseguiram pensar na possibilidade de inserir a função corretamente, a pesquisadora explicitou que os Alunos pretendiam colocar y igual a seno de x, e interrogou eles, como seria a função na sua forma Implícita. A dúvida do Aluno E persistiu e ele retomou a apostila buscando uma solução, mas o Aluno G disse que poderia ser colocado seno de x menos y .

Eles então inseriram no campo delimitado do *software*: “sin(x) – y” e encontraram o resultado esperado. Após essa experiência, tornou-se mais fácil para os Alunos inserirem outras funções, mostrando que esse era um problema de manuseio do *software*. Porém, também pôde ser considerado um problema conceitual sobre função, já que os Alunos não se atentaram para a função estar igualada a zero, e mesmo após a pesquisadora ressaltar esse ponto, eles não encontraram a solução para o problema na representação da função inserida por eles. Foi preciso que a pesquisadora trabalhasse melhor a simbologia de uma função e mostrasse como essa simbologia estava subtendida no *software.*

Como pudemos notar nas demais excertos apresentados pelo desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, os Alunos E e G e Alunos N e J passaram a trabalhar com as expressões estando atentos ao modo como as expressões deveriam ser colocadas, e também possibilitou que os Alunos compreendessem o sentido de igualar a zero, e os elementos que deveriam estar presentes em uma representação em três dimensões.

Como Papert (1994, p.21) expõe, segundo a idéia de John Dewey, “as crianças aprenderiam melhor se a aprendizagem verdadeiramente fizesse parte da experiência de vida” ou pela ideia de Jean Piaget “de que a inteligência surge do processo evolutivo no qual muitos fatores devem ter tempo para encontrar equilíbrio” ou ainda pela idéia de Lev Vygotsky, que acredita que “a conversação desempenha um papel crucial na aprendizagem.” Corroborando com esses teóricos da educação, procuramos desenvolver o trabalho com os Alunos apoiados na problematização de conceitos matemáticos, na sociabilização de saberes e experiências, entre outros aspectos abordados pelos referidos teóricos.

No que se refere a “alfabetização tecnológica”, com foco na “leitura” e na “escrita” pelo *software* K3DSurf, vemos que o modo como os Alunos deveriam inserir as expressões no programa, necessitava da observação de configuração dos elementos matemáticos presentes nele. Dessa forma, os Alunos encontraram um problema inicial ao não conseguirem representar corretamente a função desejada no K3DSurf. Como vemos em Borba e Penteado (2003, p. 60), “a configuração da maquina, é também a própria estrutura do *software*, sempre pode favorecer o surgimento de situações imprevisíveis”, logo, devemos estar atentos quando o trabalho com tecnologia for inserido em atividades educacionais.

Notamos que os *softwares* que citamos no Capítulo 2 desta pesquisa, tais como o Winplot, Geogebra, Maple e Cabri-Geomètre, e também a Calculadora Gráfica, já apresentam uma sintaxe diferente do K3DSurf, o que ressalta nossa explicitação de que o trabalho em um ambiente informatizado, como ressaltam Borba e Penteado (2003), lida com situações imprevisíveis, que podem envolver tanto a familiaridade com o *software* ou com o conteúdo matemático.

Uma outra questão que também gostaríamos de ressaltar nessa pesquisa, dá-se pela experimentação em um ambiente investigativo. Este excerto expôs levemente esse trabalho realizado pelos Alunos, mas podemos notar a presença desse atributo nos demais excertos que se seguem.

Excerto 5: Durante questão 2: *"Representem esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no software"* da Atividade Exploratório-Investigativa 3, os Alunos E e G buscaram representar a Figura 45[48] no *software* k3DSurf.

Os Alunos tentaram relembrar a que trabalharam um uma disciplina que estavam cursando na graduação, mas não conseguiram. Assim, buscaram a expressão "correta", fazendo testes de conjecturas. A primeira delas foi x^2+y^2+z, que resultou na Figura 69.

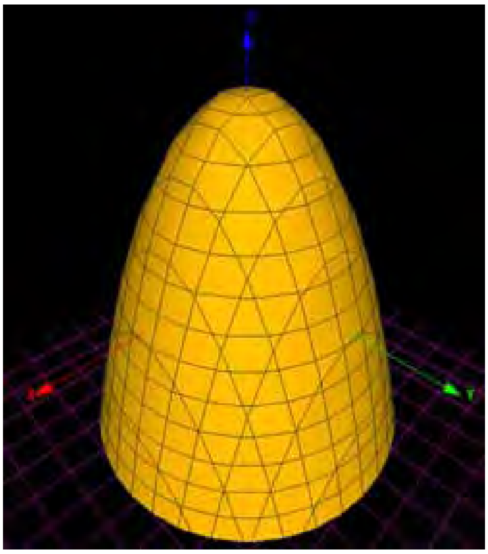


Figura 69: Representação no *software* K3DSurf da expressão x^2+y^2+z

Para posicionarem a representação de modo satisfatório, os Alunos optaram por girar os eixos para que vértice se localizasse em um ponto inferior (Figura 70), mas eles não consideraram essa figura muito parecida com a figura selecionada, pois faltava acrescentar o "pé" da figura na representação.

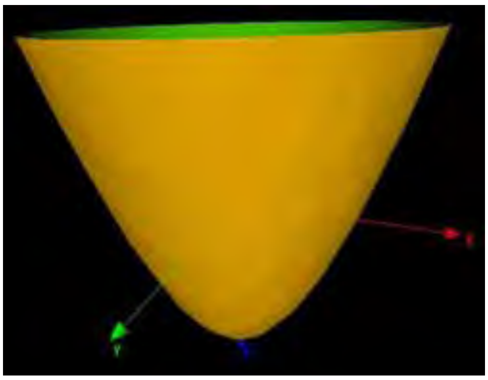


Figura 70: Representação no *software* K3DSurf da expressão x^2+y^2+z rotacionada

48 

Dessa forma, os Alunos E e G buscaram outras funções, tal como $x^2+y^2-z^2$. Usando o CUT GRIDE [comando do *software* K3DSurf], eles conseguiram limitar a representação, e relataram que conseguiram uma representação mais próxima da figura desejada, com o "pé". O teste das funções no *software* permitiu que fosse acrescentada à expressão, o valor "-0,3", e o resultado foi a representação mais semelhante da figura desejada (Figura semelhante à Figura 70, porém, com a concavidade mais fechada).

Temos que antes de trabalharem com as expressões com as quais elas aproximavam a representação da figura selecionada, os Alunos E e G testaram também as expressões x^2+y^2+z; $x^2+y^2+z^2$ e $x^2/2+y^2+z^2$.

Excerto 6: Nessa mesma questão 2 da Atividade Exploratório-Investigativa 3: *"Representem esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no software. O que vocês consideram que acontece de diferente entre essas diferentes mídias? Quais as vantagens e desvantagens vocês consideram pela visualização em cada mídia?"*, os Alunos N e J também realizaram testes de conjecturas para representar, no *software*, as imagens selecionadas por eles na primeira Questão.

Para representarem a Figura 71 no *software* K3DSurf, os Alunos inseriram as seguintes expressões: y - sen(1/x); y - sen(x); e y - (senx)/x, respectivamente, representadas pelas Figuras 72, 73 e 74, sendo a última a representação mais próxima que elas conseguiram como resultado no *software.*

Figura 71: Esteira, imagens disponível na Internet

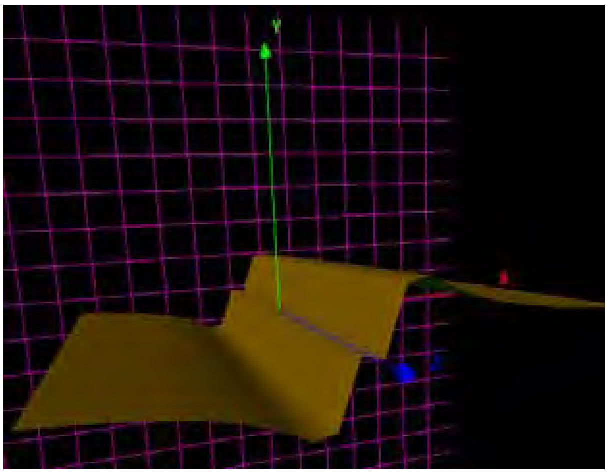


Figura 72: Representação no *software* K3DSurf da expressão y - sen(1/x)

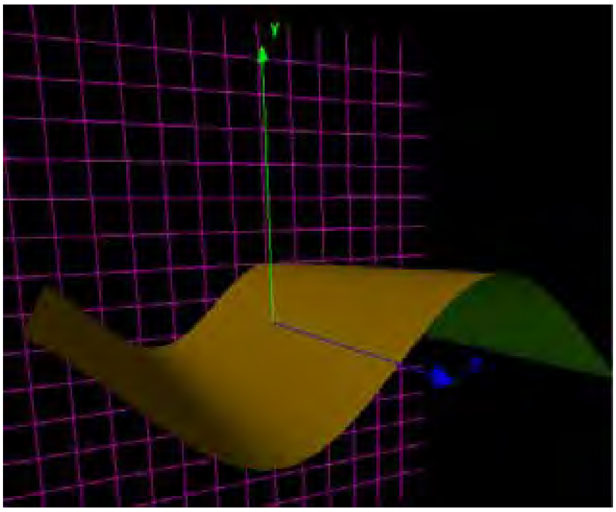


Figura 73: Representação no *software* K3DSurf da expressão y - sen(x)

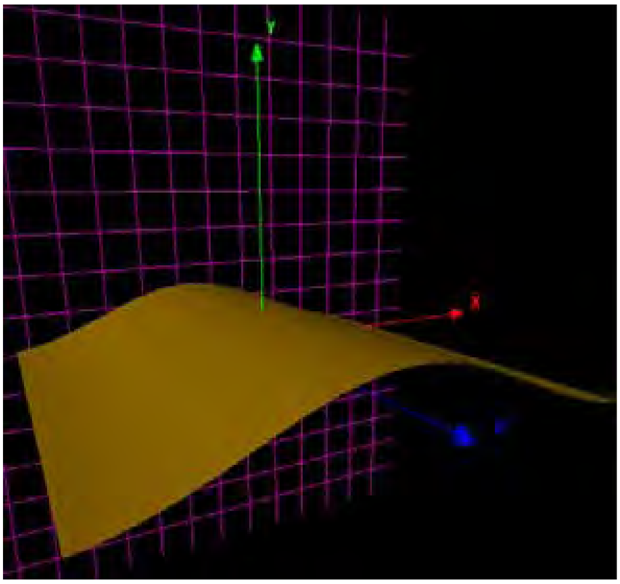


Figura 74: Representação no *software* K3DSurf da expressão y - (senx)/x

Acreditamos que o desenvolvimento de conceitos matemáticos pela experimentação de funções, utilizada pelos Alunos E e G como também pelos Alunos N e J, os quais denominados Interpretantes nesse processo, auxiliou no desenvolvimento da questão e no encontro de um resultado considerado satisfatório por estes Alunos.

Scucuglia (2006, p.11) relata que "em discussões sobre experimentação com tecnologias, sobressaem discussões sobre a visualização, pois as informações visuais podem, por exemplo, condicionar o pensamento matemático de estudantes." Nesses dois últimos excertos explicitados, percebemos que a representação feita pelo *software* diante das expressões inseridas pelos Alunos, e posteriormente, que a interpretação realizada pelos Alunos com subsídio da visualização, auxiliou no processo dos testes de conjecturas.

Dessa forma, temos nesse caso, que a produção do conhecimento matemático foi desenvolvida por meio da visualização, a qual é parte da atividade matemática e auxilia na resolução de problemas, podendo trazer diversas implicações à Educação Matemática. (SCUCUGLIA, 2006)

Nessa descrição, devemos estar atentos aos dois signos com os quais estamos trabalhando. Um deles relaciona-se à semelhança entre a Figura selecionada pelos Alunos e a representação no *software*. Assim, os Alunos – Interpretantes – teceram relações entre duas representações (obras de arte e *software*). Um outro signo que estará presente nesse processo, relaciona-se à função matemática com a sua representação no *software*. Assim, procuramos relacionar a obra de arte escolhida com à função matemática que mais se aproximava de sua representação.

Assim, temos que no primeiro caso, as imagens constituem o fundamento, "algo que dá condições para que algo se apresente diante de nós como signo" (HILDEBRAND, 2001, p. 65). Quando um Aluno observou a imagem, a aparência inicial era de um Objeto Imediato ao Interpretante Imediato, consistindo "naquilo que o signo está apto a produzir na mente interpretadora" (SANTAELLA, 2007, p.60)

Quando o Interpretante procura representar o Objeto no *software* K3DSurf, temos então o Objeto Dinâmico, aquilo que o signo irá substituir, que dá-se pelo pelo Interpretante Dinâmico, pois, de acordo com Hildebrand (2001) será realmente o que será produzido na mente interpretadora. Por fim, ao encontrarmos a representação desejável no *software*, temos o Interpretante Final, o qual se constitui de todas as interpretações desse Objeto e resignifica o signo envolvido no processo.

Estamos atentos também às relações entre Objeto e Interpretante para a função matemática e sua representação. Nesse caso, o Interpretante Dinâmico e o Objeto Dinâmico estão em um processo constante de resignificação do signo, dado que a cada momento uma expressão era inserida no *software,* os Alunos tiveram que tecer relações entre cada elemento da função com o Objeto representado. Notamos que, quando a representação aproximou-se do que os Alunos esperavam encontrar, a expressão seguinte que foi testada modificou-se pouco, enquanto observamos grandes mudanças na expressão, caso a representação estivesse bem diferente do que os Alunos buscaram representar. Para Borba e Penteado (2003), como também observamos e podemos relatar, a experimentação inverte a exposição da teoria, exemplo e exercício, para a ordem, investigação e teorização.

Em seguida, descrevemos o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas baseado no desenvolvimento dos conceitos em CDI, trabalhando conhecimentos sobre Sólidos de Revolução. Observamos, inicialmente, que os Alunos buscaram associar a resolução das questões, com os conceitos sobre Integral. Eles procuraram aplicar uma fórmula de Integral para resolver as questões de forma mais "rápida". Por conta disso, indicamos que os Alunos utilizassem os conhecimentos geométricos para encontrarem o resultado esperado, seguindo as indicações presentes nas questões.

Excerto 7: Nesse excerto, temos uma situação em que os Alunos procuraram aproximar uma das figuras artísticas selecionadas dos sites a uma figura geométrica conhecida deles, para poderem supor um cálculo aproximado da área e do volume dessas figuras.

Assim, na Figura 24[49], os Alunos N e J relataram que precisariam do raio da base maior, o raio da base menor, e também da altura da figura para calcular a área lateral. Nesse caso, o Aluno N ressaltou que essa linha seria uma curva, o que tornaria mais complicado o trabalho de calcular a área lateral. Assim sendo, o Aluno J encontrou uma solução dando a ideia de considerar a curva como uma linha reta, aproximando a linha lateral curvada de uma linha reta, e deste modo, considerando a medida da "geratriz" do tronco de cone.

O Aluno N, entretanto, considerou que somente com essas informações não seria possível o cálculo da área lateral do tronco do cone, e relatou que por meio da integral a área da figura seria facilmente encontrada, pois "A gente pode até aproximar... o que a gente conhece a gente pode aproximar, não é?" (relato do Aluno N)

Porém, nenhum resultado foi encontrado e nenhuma integral foi resolvida. O Aluno J optou por desenvolver a questão com mais calma, e sugeriu que o Aluno N aproximasse a

---

49 

curva lateral de uma reta, enfatizando que, desta maneira, eles encontrariam uma medida próxima da área lateral “real” da figura considerada. Assim, o valor “exato” do cálculo, segundo esses Alunos foi feito considerando todo o formato da figura, suas curvas.

Excerto 9: Na **Atividade Exploratório-Investigativa 4:** “Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução”, os Alunos iniciaram o desenvolvimento do cálculo aproximado das medidas das áreas e dos volumes das figuras. Neste excerto, o Aluno E fez a relação entre a fórmula da área de um cilindro conhecida na geometria e a fórmula encontrada utilizando os conceitos de integral. Assim, ele notou que as duas fórmulas são iguais.

Na questão 4 dessa atividade, foi pedido: *“Como vocês poderiam calcular a área das superfícies de revolução?”* Para responder essa questão, os Alunos deveriam seguir as perguntas que estavam disponibilizadas. Assim, pedimos que respondessem qual a área aproximada de cada figura. O Aluno E descreveu que era a área de um retângulo - considerando ser a medida da base do retângulo multiplicado com a medida da altura - e de uma circunferência - querendo se referir ao círculo como a medida de π multiplicado ao quadrado do raio da circunferência.

Em seguida, pedimos que eles dividissem um objeto em partes, e perguntamos se eles conseguiriam calcular uma área mais próxima da real. O Aluno E considerou que seria possível esse cálculo, caso dividisse o objeto em vários quadradinhos e fizessem a soma deles.

Numa outra questão que se seguiu, consideramos que se houvesse a possibilidade de dividir a figura em um número de partes qualquer, se os Alunos encontrariam uma fórmula de calcular a área utilizando o somatório dessas partes. O Aluno E explicitou que seria por meio do somatório de áreas, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} A_i$. Ele desenvolveu a fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = b_1' h_1' + b_2' h_2' + \ldots + b_n' h_n' = (b_1' + b_n' + \cdots + b_n').(h_1' + h_2' + \ldots + h_n') = (b).(h)$$

e fez o esboço na Figura 75.

Figura 75: Esboço para representar o somatório de áreas

Na Questão 5: *"Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução?"*, a pesquisadora observou que o Aluno E não conseguiu desenvolvê-la sozinho. Assim, ela retomou que no cálculo da área, ele havia planificado a figura e a dividido em "quadradinhos", mas para o cálculo do volume, não seria mais fácil planificá-lo, já que o espaço envolvido pela figura também estaria no cálculo do volume.

O Aluno E sugeriu que o sólido também fosse divido, e a pesquisadora perguntou como isso seria feito. O Aluno utilizou-se do *software* para rotacionar a figura representada nele, buscando encontrar como seria a divisão da figura em partes menores. No momento posterior ele disse: "Ah, eu não sei se seria assim... Mas se eu dividir assim, ó..." [mostra a divisão horizontal do cilindro] (Figura 76)

Figura 76: Esboço do cilindro, as linhas representam a divisão em partes menores

A Pesquisadora perguntou então quais seriam essas figuras, e o Aluno E respondeu que eram circunferências, e desta forma, ele iniciou o cálculo do volume como feito para o cálculo da área lateral da figura. Após encontrarem a fórmula do volume da figura, a pesquisadora sugeriu que o Aluno tentasse fazer pela fórmula de calcular a Integral.

Em discussão com o Aluno E, a pesquisadora explicitou que esse Aluno deveria tentar calcular a integral, pois por esse método ou pelo geométrico, feito anteriormente, o resultado deveria ser o mesmo.

Tivemos, então, a seguinte discussão entre Aluno e pesquisadora:

Aluno E: "Então aqui eu coloquei a fórmula aqui, dá $\int \pi R^2.h$. Só que o π é constante, então vai pra fora."

Pesquisadora: "Essa aí já é a fórmula pronta" [a fórmula que conhecemos para calcular o volume do cilindro]

Aluno E: "A ta..."

Pesquisadora: "Não, olha só o que você fez. Você pegou a fórmula pronta e colocou na Integral. Então, se essa fórmula já dá o resultado por que eu vou utilizar a integral?"

Aluno E: “Então eu tenho que achar uma fórmula pra colocar na integral. A integral é a soma de todas as partes.”

Pesquisadora: “E o que são as partes?”

Aluno E: “As partes são as circunferências, né?”

Pesquisadora: “Isso, então quem vai ser a função dessa integral?”

Aluno E: “Ah... A função da circunferência. Ah... Tá..., então tá. Aí calcula de novo, então vai ser a integral.”

Neste momento o Aluno pegou a equação da circunferência para calcular a integral dela $x^2 + y^2$. Então a pesquisadora interferiu nesse processo.

Pesquisadora: “O que é $x^2 + y^2$?”

Aluno E: “A circunferência.”

Pesquisadora: “O que você está somando aqui?”

Aluno E: “São várias circunferências.”

Pesquisadora: “Se eu pegar a equação eu trabalho com que parte da circunferência?”

Aluno E: “Só com a borda.”

Pesquisadora: E eu quero só a borda?

Aluno E: “Não, quero ela inteira.”

Pesquisadora: “Você tem que pensar o que você está somando... está somando o quê? Circunferência?”

Aluno E: “É!”

Pesquisadora: “O que é isso? Pensa nisso chapado [as partes que ele dizia somar] são vários desse aqui.”

Aluno E: “É inteiro.”

Pesquisadora: “Como eu acho a fórmula dessa área?”

Aluno E: “Seria calcular a área dele toda preenchida, seria calcular a área toda dele, né?”

Pesquisadora: “Qual a área dele?”

Aluno E: “A área?”

Pesquisadora: “Que figura é essa?”

Aluno E: Uma circunferência... um círculo.”

Pesquisadora: “Qual a área do círculo?”

Aluno E: “πR^2”

Pesquisadora: “Então eu vou ter... ?”

Aluno E: “$\pi R^2 + \pi R^2$ ... πR^2 πR^2 πR^2 πR^2. Então eu colocaria aqui as áreas de πR^2.”

Pesquisadora: “De πR^2”

Aluno E: “Mas vai dar certo? [o Aluno escreve]. O π é constante e o R também vai ser.. A integral de ... ah.. agora sim...”

Pesquisadora: “Deu? Que é a formula que a gente usa.”

Aluno E: “Ah ta... entendi.”

Assim, o cálculo que foi feito pelo Aluno está apresentado na Figura 77.

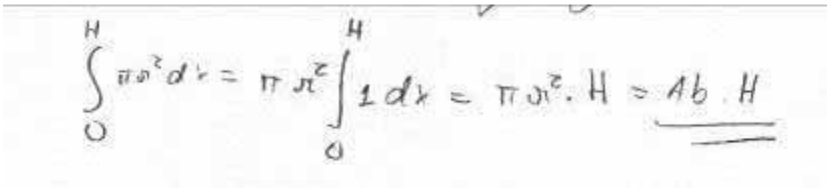


Figura 77: Cálculo do volume do cilindro feito pelo Aluno E

Nesse último excerto pudemos observar o Aluno desenvolvendo por integral, a fórmula utilizada em geometria, objetivando calcular o volume do cilindro. Esse Aluno pôde tecer relações entre o desenvolvimento algébrico e geométrico, utilizando processos de Visualização e Representação de conceitos matemáticos.

Essa proposta condiz com os trabalhos de pesquisa em nossa área, pois segundo Miskulin (1999, p. 197), ao examinar alguns trabalhos ou livros publicados, a pesquisadora percebeu que nos últimos anos, se tratando de visualização na Educação Matemática, existe também um foco no ensino e aprendizagem de Cálculo (por exemplo, pensamento matemático avançado) entre outras áreas matemáticas.

Esses anos de pesquisas, levaram alguns autores a afirmarem que “não há dúvida de que o papel da visualização na aquisição dos conhecimentos geométricos é importante.” (FLORES, 2003, p. 24), e acreditamos que a importância do papel da visualização também se expande para os conhecimentos geométricos. Assim, trabalhamos nessa atividade, buscando indicar para os Alunos, que por meio da visualização, aplicamos o conceito de Integral nos exercícios, não preocupados somente com o desenvolvimento de cálculos e métodos de calcular Integral.

Na perspectiva teórica da Semiótica, acreditamos que poderemos “descrever e analisar determinados fenômenos no processo de constituição do conhecimento matemático” (GARCIA, 2007, p. 23). Por meio desses fenômenos pudemos inferir que o Aluno – Interpretante – pôde resignificar os conceitos em CDI I e também em Geometria, ou seja, tecer novas relações para o signo abordado.

Isso ocorreu em um primeiro momento, quando o Aluno passou a observar a imagem – Primeiridade – que sugeriu algo para ele, uma interpretação natural do que podemos considerar como signo. Em seguida, o Aluno, naturalmente, teceu relações do Objeto com o sólido geométrico conhecido, nesse caso o cilindro, observando e relacionando-os quanto à forma e ao tamanho, consistindo em uma primeira busca de construção de estratégias para o desenvolvimento da questão. Pudemos perceber, então, que ele retomou algumas fórmulas de geometria plana e analítica, como também os conceitos em CDI, os quais são interpretados por nós como a Secundidade. Como Santaella (2007, p.48) pôde explicitar isso significa que "quando qualquer coisa, por mais fraca e habitual que seja, atinge nossos sentidos, a excitação exterior produz seu efeito em nós."

Por fim, em um último momento, o Aluno obteve resultados para o que havia sido solicitado no enunciado da questão, e o fez de forma que percebemos o desenvolvimento dos conceitos, partindo de elementos mais simples caminhando para a complexidade dos conceitos em CDI envolvidos na Atividade Exploratório-Investigativa 4.

Por meio dos excertos qualitativos selecionados nesta pesquisa, consideramos a importância do processo de Visualização e de Representação dos elementos matemáticos, como também a utilização da análise semiótica que possibilitou o cumprimento dos nossos objetivos nesse trabalho. Acreditamos que:

> [...] a matemática é uma forma de organização do pensamento que se concretiza através dos signos mentais e visuais, abstratamente concebidos em modelos, que, consequentemente, buscam as "*quase-verdades*" sob a ótica de uma lógica que melhor se adapte a eles. (HILDEBRAND, 2001, p. 214)

Em nosso trabalho, esses signos mostraram-se referir a qualquer forma de representação que tenha significado para o Aluno, sendo que esse objeto referenciado pode ser representado por um gesto, uma figura, um som, um outro objeto, ou qualquer meio de linguagem. Portanto, procuramos observar como os Alunos resignificam os conceitos matemáticos utilizando-se das formas de Visualização e de Representação permitidas, principalmente, por meio de *software*, material manipulativo, gestos, palavras e livros didáticos. Esses meios de linguagem são dados em conjunto num processo de interação e integração, com base na teoria semiótica. São os instrumentos que nós buscamos utilizar para explicar o desenvolvimento da aprendizagem dos Alunos, pois como Hildebrand (2001, p. 212) profere, "a matemática [...] produz conhecimento a partir da semiose dos signos e que, por sua vez, se caracteriza por estar em constante evolução".

Desta forma, por meio de algumas considerações sobre a Teoria Semiótica (PEIRCE, 2008), a qual examina os modos de constituição dos fenômenos de significado que são dados por meio das linguagens, consideramos que os Alunos puderam utilizar diversos artifícios para mostrar aos outros Alunos e à pesquisadora, como eles compreendiam um determinado conceito, como desenvolviam uma determinada Atividade Exploratório-Investigativa, focados nas imagens matemáticas, as quais para nós, representam "modelos que concebemos mentalmente, isto é, são signos visuais diagramáticos que exteriorizam o comportamento de nossas idéias abstratas" (HILDEBRAND, 2001, p. 102).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, temos como objetivo discorrer a respeito das Considerações Finais desse processo investigativo, fundamentado na Análise dos Dados dessa pesquisa. O objetivo da presente pesquisa foi **compreender os processos de visualização e de representação de conceitos matemáticos em Cálculo Diferencial e Integral (CDI), no contexto das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC),** fundamentado nas perspectivas teóricas da Semiótica de Peirce (2008) e nas teorias de representação e visualização, apresentadas por Santaella (2007), Farias (2007), Garcia (2007), Hildebrand (2001), Presmeg (2001) e Miskulin et al (2007a).

Para tanto, desenvolvemos uma investigação com alunos do curso de graduação do curso de Matemática da UNESP de Rio Claro, propondo em um primeiro momento dessa pesquisa, a Observação dos alunos da turma do primeiro ano do referido curso. Em um segundo e terceiro momentos, respectivamente, desenvolvemos Entrevistas e aplicamos seis Atividades Exploratório-Investigativas com os alunos da referida turma, que se propuseram a trabalhar em nossa pesquisa.

A preparação dos elementos presentes nas questões das Atividades Exploratório-Investigativas, deu-se pela revisão da literatura dos trabalhos realizados em CDI e TIC, pelos dados revelados nos momentos de observação das aulas de CDI e pelos momentos de Entrevistas com os alunos, com o objetivo de propor Atividades Exploratório-Investigativas apropriadas a eles.

Deste modo, realizamos uma revisão da literatura nos trabalhos dos pesquisadores Souza Jr (2000), Reis (2001), Bean (2004), Scucuglia (2006) e Barufi (1999); observamos os conteúdos em CDI nos livros didáticos de Anton (2007), Stewart (2006), Guidorizzi (2001), Leithold (1994) e Swokowski (1994)

Nas TIC consideramos as abordagens feitas por Almeida (2008), Kenski (2007) Borba e Penteado (2003) e Miskulin (1999); e contemplamos as abordagens pedagógicas feitas por Barbosa (2009), Jacyntho (2008), Olimpio Junior (2006), Menk (2005) e Scucuglia (2006).

Observamos como os Alunos participavam no desenvolvimento das aulas de CDI e procuramos conhecer um pouco mais deles, tais como suas expectativas quanto ao curso, sua familiaridade com os conteúdos matemáticos, bem como a compreensão desses Alunos pelos conhecimentos em Matemática, abordando qual conteúdo que eles apresentavam facilidade em compreender e/ou, ainda, os conteúdos que apresentavam mais dificuldades. Fizemos, em seguida, um estudo do *software* K3DSurf, buscando avaliar suas potencialidades didático-pedagógicas no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas.

Esse movimento percorrido, permitiu um estudo para o desenvolvimento da proposta das seis Atividades Exploratório-Investigativas utilizando representações de obras artísticas, que se encaminhou para a exploração do conteúdo de CDI sobre Sólidos de Revolução, utilizando os objetos manipuláveis e o *software* livre K3DSurf.

Propomos retomar nessa ocasião, os objetivos dessas Atividades Exploratório-Investigativas. Temos que a Atividade Exploratório-Investigativa 1 teve como objetivo: *investigar as possíveis interrelações sobre as noções e conceitos de superfície, sólido e volume dos alunos.* Essa atividade possibilitou aos Alunos que discutissem o que e eles entendiam sobre superfície, sólido e volume.

Para desenvolver os conceitos com os quais os alunos trabalhariam nas demais atividades, propusemos a Atividade Exploratório-Investigativa 2 com os objetivos de: *investigar a capacidade de justificação do aluno; analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; analisar o conhecimento de conceitos básicos da Geometria (conhecimento matemático) e investigar a capacidade de generalização do aluno.* Essa Atividade Exploratótio-Investigativa possibilitou aos alunos discutirem e desenvolverem os conceitos formais sobre superfície, sólido e volume, por meio de materiais manipulativos, dicionários, tutoriais e livros didáticos, buscando banir algumas dúvidas que se mostraram presentes na Atividade Exploratório-Investigativa 1.

Continuando nossa proposta, indicamos a Atividade Exploratório-Investigativa 3 com o objetivo de: *investigar a capacidade de justificação do aluno; analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos; investigar e a analisar os conhecimentos matemáticos presentes e desenvolvidos pelo contato e interação entre os alunos na atividade (1);*

investigar a capacidade e visualização 2D e 3D dos alunos dados os materiais utilizados. Após as Atividades Exploratório-Investigativas iniciais, esse momento constituiu de aplicações dos conceitos discutidos sobre área, volume, superfície e sólido, formados também pelas representações presentes nas imagens artísticas. Esse contato com as representações das obras de arte de alguns artistas encontrados nos sites da Internet deu oportunidade aos alunos para representá-las no *software* e no material manipulável, quando possível.

No prosseguimento, propusemos as Atividades Explotratório-Investigativas 4 e 5 que objetivaram: *investigar a capacidade de justificação do aluno; analisar os caminhos e estratégias seguidos pelos alunos; investigar a capacidade de visualização frente ao problema; investigar a capacidade de propor estratégias de resolução dos problemas apresentados.* Os Alunos receberam questões nas quais pedíamos a identificação de Sólidos de Revolução e propúnhamos estratégias através das quais os alunos pudessem desenvolver maneiras para calcular a Área da Superfície de Revolução e o volume desses sólidos.

Encerrando esse momento com os Alunos, objetivamos na Atividade Exploratório-Investigativa 6*: investigar o conhecimento de superfície e sólidos de revolução; analisar os caminhos e estratégias escolhidos pelos alunos; investigar a capacidade de propor novos problemas e possíveis estratégias de soluções; investigar os aspectos relacionados à Metodologia de Projetos.* Nesta atividade, os Alunos elaboraram seu próprio plano de aula, utilizando os conhecimentos desenvolvidos durante a trajetória acadêmica e o trabalho que estivemos envolvidos durante algumas semanas.

Posteriormente, com as Atividades Exploratório-Investigativas estabelecidas, tivemos o período de desenvolvimento delas pelos Alunos. Os dados constituídos nas Atividades Exploratório-Investigativas em conjunto com os relatos observados pela pesquisadora durante sua permanência na sala de aula e com os depoimentos dos alunos quanto às Entrevistas realizadas, formaram nosso *corpus* de Análise.

Esse conjunto de elementos formado pelas etapas metodológicas supracitadas permitiu responder à questão norteadora dessa pesquisa, qual seja: *Quais as dimensões implícitas nos processos de visualização e representação de conceitos em CDI no contexto das TIC*?

No capítulo sobre o qual discorremos sobre a Análise dos Dados constituídos nessa pesquisa, essas dimensões estão explicitadas em categorias de análise, as quais pudemos mencionar por: *processos de exploração e percepção dos entes geométricos*; *processos de visualização dos entes geométricos*; *processos de representação dos entes geométricos*; e *processos de re-significação dos conceitos algébricos*.

Cada uma dessas categorias é composta por excertos qualitativos, nos quais acreditamos representar as situações relacionadas ao nosso objetivo de pesquisa, com foco em momentos de desenvolvimento relacionados à visualização e à representação nas diferentes mídias: material manipulável, computador, jogo computacional, *softwares* educativos e Internet.

Para essa análise tivemos como respaldo teórico alguns pontos da Teoria da Semiótica, desenvolvida por Peirce (2008), que nos permitiu compreender os fenômenos envolvidos no processo de visualização e representação dos conceitos geométricos, abordados por meio dos signos.

Segundo a Teoria Semiótica, podemos compreender os fenômenos de acordo com uma classificação triádica, abordando os aspectos da Primeiridade, Secundidade e Terceiridade. Tal como fizemos em nosso Capítulo contendo a Análise dos Dados, pudemos classificar nossas quatro categorias de análise constituídas, explicitando-as como: a primeira categoria denominada *Processos de exploração e percepção dos entes geométricos*, refere-se à Primeiridade, a segunda categoria denominada *Processos de visualização dos entes geométricos*, refere-se à Secundidade, as terceira e quarta categorias denominadas *Processos de representação dos entes geométricos* e *Processos de re-significação dos conceitos algébricos*, referem-se à Terceiridade.

Desse modo, pudemos traçar algumas considerações acerca dos excertos explicitados no capítulo que discorre sobre a Análise dos Dados da pesquisa. Nesse momento, trazemos nossas considerações finais sobre esse trabalho, tomamos o cuidado de retomar alguns dos momentos que nos permitiram tecer tais considerações, possibilitando esclarecer ao leitor quais os elementos que nos levaram às conclusões que se seguem.

Na exploração de nossa primeira categoria de análise: "*Processos de exploração e percepção dos entes geométricos*", a qual expõe o desenvolvimento das Atividades 1 e 2, encontramos nos excertos a forte presença de diferentes linguagens a fim de representar os elementos trabalhados, por meio de: pronúncia e escrita de palavras; gestos feitos com as mãos; esboço de figuras no papel; e formação de objetos manipulativos. Esses elementos estão diretamente ligados ao processo de representação e visualização pelos alunos, pois a utilização dos elementos visuais, verbais e mentais na formação dos conceitos presentes é capaz de significar as categorias matemáticas.

Nessa categoria de análise, indicamos, a partir desses excertos escolhidos, dois momentos encontrados nas Atividades Exploratório-Investigativa 1 e 2. No primeiro momento, relatamos a passagem pela qual os Alunos utilizam a manipulação dos sólidos para desenvolverem um conceito verbal. Assim, ao abordarem o conceito de Volume, eles consideraram ser a medida de um sólido específico, e exemplificam ao citarem um paralelepípedo de medidas de lado “l”, que possui o volume de medida “l x l x l”. Para esses Alunos, inferimos que eles deixam transparecer nessa interação, que um leitor, geral, poderia generalizar esse cálculo de volume para qualquer outro tipo de sólido.

O segundo momento que recordamos, prosseguiu no trabalho em grupo pelos 5 alunos que participavam da Atividade Exploratório-Investigativa. Eles buscavam, por meio da manipulação e visualização de uma bola de isopor, exemplificar os conceitos de superfície, área, sólido e volume.

Logo na segunda categoria de análise constituída pelos: “*Processos de visualização dos entes geométricos*”, o foco de nossa análise deu-se pelo modo como os alunos perceberam e teceram relações entre os objetos presentes as imagens (obras artísticas) inseridas no contexto das Atividades Exploratório-Investigativas. Para tal, os alunos utilizaram-se, constantemente, das propriedades de semelhança para desenvolverem as questões propostas nessas Atividades Exploratório-Investigativas, como um modo de encontrarem um “resultado” para o que havia sendo pedido nos enunciados das questões. Desta forma, retomamos os elementos presentes na categoria anterior, tais como a representação por meio de gestos, elementos da fala ou esboços no papel, e acrescentamos as associações dos conceitos matemáticos presentes por meio da representação no *software* e por expressões matemáticas, as quais, em conjunto, permitiram desencadear os processos de visualização e de representação dos conceitos matemáticos.

Pudemos observar também nessa categoria de análise, a qual destacamos nesse momento, o modo de cada Aluno visualizar um elemento e relacioná-lo aos demais elementos conhecidos por ele. Esse modo de visualizar, próprio de cada um, refere-se aos conhecimentos advindos das experiências educacionais e sociais anteriores e atuais. Assim, consideramos pertinente abordar que o visualizar é próprio e distinto de cada Aluno, e o contato com o modo de visualizar dos outros, como também as demais experiências presenciadas por ele configuram e resignificam constantemente os seus processos de visualização. Como Garcia (2007, p. 41) afirma, “representamos somente aquilo que vemos e analisamos”. A autora explicita ainda que os fatores estruturais da visualidade e às formas de elaboração do conhecimento humano estão associados a essas representações, sendo que, desta forma, para observarmos e construirmos novos conceitos, precisamos, constantemente, recorrer às imagens e suas respectivas representações.

Optamos, deste modo, por recordar três excertos qualitativos abordados nessa segunda categoria de análise denominada *Processos de visualização dos entes geométricos*. No primeiro desses excertos, os Alunos N e J relatam que o fato de poderem rotacionar a figura representada no *software* K3DSurf[50], potencializa os processos de visualização dos elementos matemáticos com os quais eles estavam trabalhando. Esse processo permitia a eles observarem uma representação sob diversas perspectivas, notando medidas, formas e conceitos que poderiam estar implícitas se tivessem apenas um determinado ponto de vista pelo meio visual disponibilizado.

No segundo excerto, observamos o trabalho independente dos Alunos J, N e E, porém utilizando de uma mesma obra artística. Como pudemos observar, esses Alunos teceram considerações diferentes ao representarem essa mesma imagem, enquanto o Aluno E considerou a imagem como a representação de um cilindro, os Alunos N e J consideraram-na como a representação de um tronco de cone. Apesar de tomarem essas formas de representações diferenciadas, como também de produzirem cálculos distintos, podemos notar que o desenvolvimento de propriedades matemáticas deu-se de modo similar, associadas ao cálculo da medida do volume.

O terceiro, e último excerto selecionado na segunda categoria de análise, refere-se ao modo de desenvolvimento da questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 5, na qual os Alunos E e G utilizaram a experimentação de algumas expressões matemáticas para encontrarem uma representação mais aproximada da forma apresentada pela cúpula de uma igreja. Esse procedimento foi possibilitado pela utilização do *software* K3DSurf e de seus componentes, que permitiram aos Alunos praticarem a representação tridimensional dada às funções matemáticas, como também de utilizarem as funções do *software*, ao exemplo da CUT GRID, que consentia a limitação dos valores de uma coordenada, para a formação da figura a ser projetada. Esse procedimento foi interessante, pois permitiu que os alunos se aproximassem da representação da cúpula da igreja.

Em nossas últimas categorias de Análise dos Dados: *Processos de representação dos entes geométricos*; e *Processos de re-significação dos conceitos algébricos*, os quais abordam a utilização de elementos e aspectos intuitivos para a representação dos objetos apresentados nas Atividades Exploratório-Investigativas 3, 4 e 5, em diversos momentos, compreendemos que os Alunos buscaram representar os objetos por meio do que “parece ser”, ou seja, das “semelhanças” emergidas no processo de visualização. Assim, eles iniciam muitas questões

[50] Como já foi referenciado no segundo Capítulo desta Dissertação.

relacionadas a essa categoria, considerando uma provável representação do objeto matemático e desenvolveram o seu pensamento com prováveis representações por meio dos objetos manipulativos, esboços ou representação em forma digital. Notamos, nessa fase, que os alunos ficaram “presos” à qualidade do objeto a ser representado, o qual, segundo Santaella (2007), representa a Primeiridade, pois o objeto a ser compreendido é “apreendido” por meio de sua qualidade. Podemos dizer também, de acordo com Fischbein (1993 apud MISKULIN, 1999), que essa forma que os Alunos trabalharam com a representação refere-se à sua “imagem figural”, como explicitamos no terceiro Capítulo dessa Dissertação.

Deste modo, em uma outra fase, os alunos puderam tecer relações entre elementos matemáticos que se referem ao que eles gostariam de representar. Temos, nesse momento, a Análise Semiótica a Secundidade, pois os Alunos começam a relacionar conceitos matemáticos à qualidade do objeto. Como vimos em alguns casos, a forma como os alunos pensaram em um primeiro momento, não se referiu à representação semelhante do objeto indicado, ocasionando diversas situações de experimentação, como descreveremos em seguida.

O procedimento de experimentação mostra-se também como um elemento fundamental nessas duas últimas categorias supracitadas, e foi constantemente utilizado pelos alunos, tanto na representação de objetos manipulativos quanto nos meios digitais. Compreendemos que essa estratégia utilizada pelos Alunos em nossa pesquisa, pode ser exemplificado pela representação planificada do sólido manipulativo que eles pretendiam representar no espaço. Podemos ainda exemplificar esse procedimento de experimentação na inserção de diversas expressões no *software* K3DSurf que buscaram produzir uma representação equivalente ao sólido concebido nas obras de arte. Assim, continuamos nessa fase: Secundidade, segundo Santaella (2007), pois os Alunos já estabelecem relações conceituais entre a qualidade do objeto e começam a definir como ela se manifesta no objeto, no caso, a planificação do sólido por meio de objetos manipulativos e suas relações matemáticas. Para nós, esses momentos configuraram-se por meio de experiências que os alunos tiveram contato durante o desenvolvimento das seis Atividades Exploratório-Investigativas, tornando a aprendizagem de conceitos matemáticos mais significativa.

Deste modo, podemos relacionar essa categoria a três excertos recordados em seguida. Em uma primeira passagem, optamos por relatar a forma pelo qual o Aluno J buscou recortar a cartolina para fazer a montagem de um tronco de cone, e percebeu que o recorte feito não permitia encontrar o resultado certo. Os Alunos J e N discutiram como deveriam recortar a cartolina para fazer a planificação perfeita do sólido e, assim, conseguirem compor a representação tridimensional adequada. Esse processo de experimentação permitiu a eles, levantar hipóteses e conjecturas sobre a forma geométrica e suas possíveis relações matemáticas. Segundo Peirce (2008) esse processo consiste no modo de raciocinar próprio dos matemáticos, o qual gira em torno do uso de semelhanças, possibilitando analogias entre as partes do objetos que são relacionados.

No segundo excerto, temos a discussão da outra dupla, formada pelos Alunos E e G. Eles fizeram experimentação de expressões matemáticas no *software* K3DSurf, buscando entender como as funções deveriam ser inseridas no *software* para encontrarem a representação do sólido escolhido. Por meio dos elementos contidos em cada expressão, eles também tiveram a possibilidade de fazer relações que permitissem compreender quais os elementos da expressão (incógnitas e valores) que deveriam ser mudados para encontrar a representação objetivada.

Para discutir acerca dos elementos matemáticos que são necessários para o cálculo da área lateral do tronco de cone, selecionamos um excerto que toma como exemplo o diálogo entre os Alunos N e J. O Aluno N ressaltou que, pela representação do sólido, eles deveriam considerar a linha lateral, representada por uma curva, como uma linha reta, ou seja, a geratriz[51], o que facilitaria os cálculos numéricos. Eles discutira o modo de tornar o valor da área lateral mais próxima ao valor real, considerando a divisão do tronco de cone original em múltiplos troncos de cone menores, atenuando o erro final da medida da geratriz conjeturada.

Observamos e podemos inferir que em outros resultados desse processo investigativo, advindos da interpretação dos dados, encontramos o aspecto da socialização. Como pesquisadoras, buscamos conhecer as necessidades dos alunos, bem como as potencialidades e anseios deles para procurar encaminhá-los à aprendizagem dos conceitos matemáticos. Segundo Santaella (1985 apud MISKULIN ET AL, 2007a, p. 2) “todo e qualquer fato cultural, toda e qualquer atividade ou prática social é também uma prática de produção de linguagem e de sentido”, e desta forma Miskulin et al (2007a, p. 2) concluem “que a utilização das novas tecnologias, enquanto atividade cultural, pode ser concebida como uma prática que pode produzir sentido e significado”. Assim, deduzimos também que a interação entre pesquisadora-alunos, alunos-alunos e alunos-mídias possibilitou o desenvolvimento de novos conhecimentos com a presença de metodologias de ensino diversas no ambiente constituído pelo grupo de alunos.

[51] Em geometria, a geratriz representa a reta cujo movimento gera uma superfície. (DICIONÁRIO PRIBERAM, 2009)

Dessa socialização, buscamos aspectos referentes à aprendizagem, no que condiz à construção do conhecimento, baseados principalmente na Teoria Semiótica de Peirce (2008). As relações encontradas na exploração do universo signico, dado pelos elementos presentes nesta pesquisa, consideraram o ponto de vista de cada Aluno no que se refere à análise dos dados apresentados, focado nos processos de visualização e de representação. Esse modo com o qual trabalhamos, condiz com a apresentação de Flores (2003, p.177) no qual a autora profere que "permanecemos muito mais presos ao ponto de vista único do que imaginamos. Por mais que tentamos, ensaiamos, questionamos, continuamos de par com o pensamento objetivo e racional."

O que pretendíamos então, era possibilitar diversas formas para os alunos ultrapassem esse pensamento "enraizado" e pudessem desenvolver Atividades Exploratório-Investigativas, capacitando-os para "abrir" o pensamento, de considerarem diversas formas de "ver" as situações, ou seja, de aplicar estratégias diversificadas para resolver os problemas que, porventura, fossem a eles apresentados.

Assim, procuramos distanciar os Alunos envolvidos neste trabalho, do pensamento matemático tradicional que, muitas vezes, mostra-se objetivo, verdadeiro, inalterado e neutro. Notamos que Santaella (2007) corrobora com as idéias supracitadas, ao proferir que:

> [...] a Matemática é observativa na medida em que monta construções na imaginação de acordo com preceitos abstratos, passando, então, a observar esses objetos imaginários para neles encontrar relações entre partes que não estavam especificadas no preceito da construção (SANTAELLA, 2007, p. 24).

Retomando essa ideia para o nosso contexto de pesquisa, mostramos como entendemos o processo de ensino e aprendizado dos conceitos matemáticos no desenvolvimento das seis Atividades Exploratório-Investigativas propostas. Pudemos perceber que os Alunos apresentavam seus próprios conceitos e percepções do objeto com o qual estavam trabalhando, ou seja, percebiam suas qualidades, observavam suas particularidades, as quais eram possibilitados a partir de conceitos interiorizados em cada um. Consideramos que em um processo continuo, esses momentos findavam-se nas relações constantes com novos objetos, novos conceitos e novas interpretações, que modificavam o modo que os alunos percebiam o objeto.

Um dos momentos em que podemos perceber que alguns conceitos constituem em novas interpretações, deu-se no desenvolvimento da questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 5. No diálogo entre o Aluno E e Aluno G, o primeiro diz para o segundo que a figura selecionada por eles era parecida com um parabolóide (Figura 56 - referenciada no quinto Capítulo desta Dissertação).

Notamos que em nenhum outro momento do nosso trabalho foi pronunciado ou trabalhado tal expressão matemática. Esses Alunos, além de utilizarem o termo parabolóide, utilizaram outros conceitos associados a essa palavra, tal como sua representação no papel. Isso permitiu que fosse discutida, na questão 1 da Atividade Exploratório-Investigativa 5, alguns conhecimentos matemáticos já conhecidos por eles.

Destacamos também nessa Análise Semiótica, os modos de compreensão e visualização dos conceitos matemáticos, pois notamos que as representações matemáticas se fazem essenciais nesse processo. Além disso, "é notória a associação, das representações gráficas à visualização de conceitos" (FARIAS, 2007, p.184). Deste modo, realçamos em nosso trabalho as formas algébricas trabalhadas e as suas respectivas representações geométricas por meio do *software* K3DSurf. Podemos citar os momentos nos quais os Alunos, envolvidos nessa pesquisa, puderam articular as relações entre as Atividades Exploratório-Investigativas e o *software* k3DSurf, por meio da inserção de funções algébricas e seus respectivos esboços em gráficos de três dimensões.

Como podemos exemplificar a partir dos dados constituídos por nós, durante o desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, temos mais uma discussão sobre esse tema entre os Alunos E e G. Durante a experimentação de expressões algébricas, eles objetivaram representar a figura desejada, por meio do *software* k3DSurf, de uma forma similar. Como relatamos anteriormente neste capítulo, isso permitiu à eles tecer relações entre cada incógnita e valores numéricos da representação apresentadas pelo *software*. Dessa forma, para representarem um vaso que era constituído por um "pé" em sua forma, os alunos trabalharam com o comando CUT GRIDE [comando do *software* K3DSurf] e o valor numérico "-0,3" na expressão $x^2+y^2-z^2$. (Figura 70 referenciada anteriormente no Capítulo 5).

Tivemos também a apropriação dos conceitos matemáticos pelos Alunos, no trabalho com objetos manipuláveis durante o processo de planificação da superfície de um objeto representado em três dimensões, no qual eles puderam perceber sua reprodução em diversas formas.

Pudemos acompanhar, no desenvolvimento da Atividade Exploratório-Investigativa, o momento no qual o Aluno E relata que a figura escolhida por ele assemelhava-se ao sólido cilindro. Ele disse que, para representar o objeto com uma cartolina seria preciso cortar o papel na forma de um retângulo e torcê-lo. O Aluno E preocupou-se também em representar os elementos implícitos à visualização do objeto real, pois acrescentou a essa representação:

um pedaço de papel cortado em círculo que encaixaria por debaixo do cilindro, fazendo um “fundo” para o sólido, o qual não podia ser “enxergado” pelo objeto real.

Nessa pesquisa, ao conceber diversas metodologias para a aprendizagem e desenvolvimento dos conceitos matemáticos por meio da visualização e da representação, procuramos indicar diversas formas de trabalho que permitiram aos alunos construir seu próprio processo de significação. Assim, eles puderam conceber os conceitos por diferentes maneiras, aumentando sua capacidade de sintetizá-los (MISKULIN ET AL , 2007a).

Assim, percebemos que o processo Semiótico acontece em todos os momentos, proporcionando aos sujeitos um processo constante de interpretação dos objetos apresentados, tecendo relações semióticas entre: o signo, seu objeto e o interpretante.

Presente na pluralidade dos excertos que optamos por apresentar nessa pesquisa, temos que, inicialmente, por meio da seleção de representações de obras de arte, os Alunos tiveram a possibilidade de perceber as representações dos sólidos em contextos diversos propiciados pelas imagens. Em Flores (2003, p.39) encontramos que a técnica de perspectiva foi desenvolvida por meio desses contextos mencionados e, durante o seu desenvolvimento, passou a constituir-se “como o efeito e o suporte para olhar e para representar as imagens”.

Em seguida, os estudantes tornaram possíveis as representações dos sólidos apreendidos, por meio do *software*, do esboço no papel ou da manipulação dos objetos. Como notamos, alguns conceitos matemáticos são requisitados no segundo momento explicitado. Por fim, temos no desenvolvimento das Atividades Exploratório-Investigativas, momentos que vêm permitir que os Alunos passem a procurar formas de calcular a medida do volume e da área desses sólidos. Para esse último momento, exemplificamos a passagem em que o Aluno E considera a possibilidade de dividir o sólido cilindro em um número de partes iguais, que pode ser notado por ele ao manusear o *software* K3DSurf - dado pela rotação da representação, admitindo diversas perspectivas. Assim, este estudante pode concluir que teríamos um conjunto de círculos postos um sobre o outro para formar o sólido, o que torna possível o cálculo da medida do volume desse sólido, por meio do somatório das medidas das áreas dos círculos.

Por fim, apresentamos a importância que esses alunos ressaltaram nos depoimentos presentes nas Entrevistas, que: a apreensão deles quanto à necessidade em compreender os conceitos matemáticos presentes no conteúdo em Calculo Diferencial e Integral (CDI) para sua futura prática pedagógica do Ensino Fundamental ao Ensino Superior. Isso demonstra o saber desses Alunos com relação aos conhecimentos matemáticos nos diversos níveis de ensino, e deste modo, notamos que esses estudantes estão sempre buscando aperfeiçoar seus conhecimentos fora dos momentos de aula.

Durante o desenvolvimento dessa pesquisa, observamos a importância de refletir sobre outros aspectos, os quais não aprofundamos. Sugerimos que essas reflexões possam ser trabalhadas posteriormente por professores e pesquisadores na área, no que se referem à Formação Inicial de Professores, considerando algumas mudanças provocadas na postura da pesquisadora, autora desse trabalho, quanto à reelaboração de concepções e conceitos em CDI. Supomos também que podem ter ocorrido mudanças similares e significativas nesses professores em formação, os quais participaram desse trabalho.

Portanto, fazemos a seguinte reflexão: a grande parte dos trabalhos desenvolvidos nessa área não chegam ao conhecimento dos professores que frequentam as salas de aula. Porém, nesta pesquisa, tivemos a participação dos alunos da Licenciatura em Matemática, que poderão tornar-se os futuros professores, e que tiveram a oportunidade de conceber novos modos para constituir ou, ainda, transformar a sua prática pedagógica. Assim, deixamos a pergunta para um possível trabalho futuro: Quais a possíveis reflexões e mudanças que esta pesquisa representou na futura prática pedagógica desses alunos, dado que eles trabalharam com diferentes metodologias durante os cursos de CDI e com as Atividades Exploratório-Investigativas desenvolvidas na pesquisa?

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola, 1901. **Dicionário de Filosofia.** Tradução Alfredo Bosi. 21 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

ALMEIDA, Maria. Elizabeth Bianconcini de. **Tecnologias na educação**: dos caminhos trilhados aos atuais desafios. Bolema, Rio Claro - SP, v.1, n. 29, abr. 2008. p. 99-129.

ALVES-MAZZOTTI, Alda; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.

ANTON, Howard. **Cálculo.** 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. p. 452-494.

ARAÚJO, Inês Lacerda. **Do Signo ao Discurso:** introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola Editorial, 2004.

BARBOSA, Sandra Malta. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.** 2009. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2009.

BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado). USP. São Paulo, 1999.

BEAN, Dale William. **Aprendizagem Pessoal e Aprendizagem Afastada:** o caso do aluno de Cálculo. Campinas, 2004. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

BOGDAN, Roberto C; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 3 ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2003.

CARDOSO, Luiz Fernandes. **Dicionário de Matemática.** Porto Alegre, L&PM, 2007.

CHIZZOTTI, Antônio. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

COSTA, Fernando Albuquerque. **O que justifica o fraco uso dos computadores na escola?** Lisboa: Polifonia, 2004. p. 19-32. Disponível em: www.fl.ul.pt/unil/pol7/pol7_txt2.pdf (Edições Colibri, n.7). 2004.

DICIONÁRIO PRIBERAM da Língua Portuguesa. Disponível em: <http://www.priberam.pt/DLPO/default.aspx?pal=representar>. Acesso em: 17 out. 2009.

DICIONÁRIO VIRTUAL Escolar de Filosofia. Disponível em: <http://www.defnarede.com/c.html>. Acesso em: 16 set. 2009.

DRIJVERS, Paul; KIERAN, Carolyn; MARIOTTI, Maria-Alessandra; AINLEY, Janet; ANDRESEN, Mette; CHAN, Yip Cheung; DANA-PICARD, Thierry; GUEUDET, Ghislaine; KIDRON, Ivy; LEUNG, Allen; MEAGHER, Michael. Integrating Technology into Mathematics Education: theoretical perspectives. In: HOYLES, Celia; LAGRANGE, Jean-Baptiste (Eds.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain.** 17th ICMI Study (2002). v. 13. New York: Springer, 2010. p. 89-132.

FARIAS, Maria Margarete do Rosário. **As representações matemáticas mediadas por *software*s educativos em uma perspectiva semiótica:** uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de matemática. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

FISCARELLI, Rosilene Batista de Oliveira. **Material didático e prática docente**. In: I Encontro Iberoamericano de Educação, 2006, Alcalá de Henares. I Encontro IberoAmericano de Educação. Alcalá de Henares, 2006.

FISCHBEIN, Efraim. **The theory of Figural Concepts.** In: Educacional Studies in Mathematics, 24/2. 1993. p. 139-162.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, Saber, Representar:** ensaios sobre a representação em perspectiva. 2003. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Ciências da Educação. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2003.

GARCIA, Luciane Maia Insuela. **Os processos de visualização e representação dos signos matemáticos no contexto didático-pedagógico.** 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2007.

GOLDENBERG, Mirian. **A Arte de Pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GOUVEIA, Carolina Augusta Assumpção. **O Uso do *Software* 3D na Geometria Espacial.** Juiz de Fora, 2007. Monografia (Especialização em Educação Matemática). Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2007.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo.** v. 1, 5 ed. Ed. LTC, 2001. p. 401-413.

GUTIERREZ, Ángel. **Visualization in 3-Dimensional Geometry:** In Search of a Framework. Departamento de Didáctica de la Matemática – Universidad de Valencia – Spain. PME 20th Proceedings – july – 8-12, v. 1, 1996. p. 1-19 .

HILDEBRAND, Hermes Renato. **As Imagens Matemáticas:** a semiótica dos espaços topológicos matemáticos e suas representações no contexto tecnológico. 2001. Tese (Doutorado em Comunicação e Semiótica). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2001.

JACYNTHO, Luiz Antônio. **Uso de Episódios Históricos e de Geometria Dinâmica para Desenvolvimento de Conceitos de Integral de Riemann e do Teorema Fundamental do Cálculo para Funções Reais de Variável Real**. 2008. Dissertação (Mestrado Profissional). Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.

KAPUT, James J. Representation systems and mathematics, in: **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**, C. Janvier, ed., Lawrence Erlbaum, Hillsdale, 1987. p. 19-26.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias o Novo Ritmo da Informação**. v. 1. p.141. Campinas: Papirus, 2007.

LAURENTIZ, Silva. **As Imagens Animadas.** 1999. Tese (Doutorado em Comunicação e Semiótica). PUCS. São Paulo, 1999.

LEFEBVRE, Muriel. **Images, Écritures et Espace de médiation.** Étude anthropologique des pratiques graphiques dans une communauté de mathématiciens. 2001. Thése de Doctorat (Sciences de l'Information et de la Communication), Université Louis Pasteur. Strasbourg I, Strasbourg, França. 2001.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** v.1, 3 ed. Editora Harbra Ltda, 1994. p. 376-388.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani*;* BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.). **Educação Matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005. p. 265-282.

MENK, Leonor Farcic Fic. **Contribuições de um *software* de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos.** 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática). Centro de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2005.

MICHAELLIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa.** Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Acesso em: 4 fev. 2009.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria.** Campinas, 1999. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1999.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra; ESCHER, Marco Antônio; SILVA, Carla Regina M. da. A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: Uma Experiência com a Utilização do Maple em Cálculo Diferencial. **Revista de Educação Matemática**, v. 10, n.11, 2007. p. 29-37.

MISKULIN, Rosana Giaretta Sguerra; MENDES, Rosana Maria; FARIAS, Maria Margarete R.; MOURA, Anna Regina Lanner de; SILVA, Mariana da Rocha Correa. A Semiótica como Campo de Análise para as Representações de Conceitos Matemáticos. **Cadernos de Semiótica Aplicada**, v. 5, n. 2, 2007a.

O MOVIMENTO e seus Produtos. Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/trabalho_winplot/solidosderevolucao.htm>. Acesso em: 29 nov. 2009.

OLÍMPIO JUNIOR, Antônio. **Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática:** uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2006.

PIAGET, J., INHELDER, B. **A Representação do Espaço na Criança.** Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas (Tradução de La Represéntation de l'Espace chez l'Enfant), 1993.

PAIS, Luiz Carlos. **A Representação dos Corpos Redondos no Ensino da Geometria.** Zetetiké, Campinas, Ano 2, nº 2, 1994. p. 13-23.

PAPERT, Seymour. **A Máquina das Crianças:** repensando a escola na era da Informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PEIRCE, Charles Sanders. **Semiótica.** São Paulo: Perspectiva, 2008.

PONTE, João Pedro da, BROCARDO Joana, OLIVEIRA, Helena. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PRESMEG, Norma. **Progressive Mathematizing Using Semiotic Chaining.** Discussion Group on Semiotics and Mathematics Education at the 25th PME International Conference, The Netherlands, University of Utecht, July 12-17, 2001.

QUADROS, máquinas e até engenhos voadores: Da Vinci reinventa o mundo. **Veja on-line**. Disponível em: http://veja.abril.com.br/idade/descobrimento/p_084.html. Acesso em: 02 mai. 2007.

RAPOSO, Maria Tereza Resende. O Conceito de Imitação na Pintura Renascentista e Impressionista. **Metanoia:** revista eletrônica Print by FUNREI, São João del-Rei, n. 1, 1999, p. 43-50.

REESTRUTURAÇÃO Curricular do Curso de Graduação em Matemática. Igce, Unesp. Campus de Rio Claro – SP, 2006. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/matematica/>. Acesso em: 12 set. 2008.

REIS, Frederico da Silva Reis. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:** A Visão De Professores-Pesquisadores E Autores de Livros Didáticos. 2001. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

ROSA, Maria Virgínia de Figueiredo Pereira do Couto. **A Entrevista na Pesquisa Qualitativa:** mecanismo para validação dos resultados. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SANTAELLA, Lúcia. **Semiótica Aplicada.** São Paulo: Thomson, 2007.

________. **Estética:** de Platão a Peirce. São Paulo: Experimento, 1994.

________. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 1985, 86 p.

SCUCUGLIA, Ricardo. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2006.

SILVA, Miriam Godoy Penteado. **O computador na perspectiva do desenvolvimento profissional do professor.** Campinas, 1997. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 1997.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema,** ano 13, n.14, p. 66-91, São Paulo, 2000.

SOUZA JR. Arlindo José de. **Trabalho Coletivo na Universidade**: Trajetória de um grupo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral. 2000. Tese (doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 2000.

STEWART, James. **Cálculo.** v. 1. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. p. 550-571.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica.** v.1, 2. ed.1994. p. 400-435.

VILLARREAL, Mônica. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas.** 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 1999.

ANEXOS

ANEXO 1: QUESTÕES PROPOSTAS PARA A ENTREVISTA REALIZADA COM OS ALUNOS

unesp Universidade Estadual Paulista "JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

ENTREVISTA ELABORADA PARA SER APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Data:_______________________

1. **Nome e idade:** ____
2. **E-mail e telefone:** ____
3. **Cidade e estado de origem:**______________________________
4. **Cidade e estado onde mora atualmente:**______________________________
5. **Qual a motivação para fazer o curso de matemática?**
6. **Tem facilidade para entender os conteúdos matemáticos?**
7. **Você conhece o currículo do curso?**
    a. **Quais as disciplinas que mais gosta? Por quê?**
    b. **Quais as disciplinas que mais tem ou teve dificuldade para assimilar o conteúdo?**
8. **Como costuma estudar matemática? (resolve os exercícios, estuda a teoria, usa o livro, apontamentos, por exemplo)**
9. **Você acha importante entender noções e conceitos mais primitivos/básicos?**
10. **Você acha que as articulações entre as representações algébricas, geométricas e aritméticas auxiliam na compreensão do conteúdo matemático? Por quê?**
11. **Você procura recursos diferentes dos indicados pelo professor para estudar matemática? (software, objetos manipulativos, jogos, livros, vídeo, por exemplo)**
12. **O que você acha do uso do computador como recurso para aprender matemática? Já usou algum software educativo? Qual?**
13. **Pretende ser professor de matemática? Por quê?**
14. **Na sua opinião, a disciplina Cálculo é importante? Por quê? Qual a influência da disciplina Cálculo para formação do futuro professor de Matemática?**
15. **Você gosta de estudar individualmente ou em grupo?**
16. **O que o motivou a participar dessa pesquisa?**

Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Mestranda da Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

ANEXO 2: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 1

Universidade Estadual Paulista "JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 1

Noções e conceitos sobre superfície e volume conhecidas pelo aluno

Questões:

1.1.) Escrevam, com suas palavras, o que vocês pensam sobre **superfície**. Vocês podem acrescentar exemplos para ilustrar seu conceito.

1.2.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **sólido**.

1.3.) Como feito na questão 1, escrevam, com suas palavras, o que vocês entendem por **volume**.

1.4.) Vocês acham que existe uma relação entre **superfície e sólido**? Qual seria?

1.5.) Vocês acham que existe uma relação entre **volume e sólido**? Qual seria?

Objetivos:

- Investigar as possíveis inter-relações sobre as noções e conceitos de superfície, sólido e volume dos alunos.

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

ANEXO 3: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 2

unesp Universidade Estadual Paulista "JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: *Carolina Augusta Assumpção Gouveia*
Orientadora: *Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin*
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 2

Noções e conceitos formais sobre superfície e volume

Questões:

2.1.) Qual o conceito de superfície?

2.2.) Uma superfície é representada em que dimensões conhecidas? 1D, 2D, 3D,...

2.3.) Tendo respondido a Questão 1, o que vocês podem inferir sobre plano e sólido?

2.4.) Quais os tipos de superfícies que encontramos, a nosso redor, no nosso ambiente? Qual a diferença dos tipos de superfície que estudamos na escola e aquelas que vivenciamos e/ou manipulamos diariamente? Dê exemplos.

2.5.) O que representa um sólido?

2.6.) Qual o conceito de volume?

2.7.) Qual a relação entre o sólido e o volume?

2.8.) Recordando o conceito dado na Questão 1, sobre superfície, para vocês o que representa a superfície em um sólido?

2.9.) O que são superfícies de revolução? Quais suas características principais? Vocês poderiam citar elementos comuns em todas elas? (como eixo, curva, direção de rotação)

Objetivos:

- Investigar a capacidade de justificação do aluno;
- Analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos;
- Analisar o conhecimento de conceitos básicos da Geometria (conhecimento matemático);
- Investigar a capacidade de generalização do aluno..

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

ANEXO 4: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 3

unesp Universidade Estadual Paulista "JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 3

Visualização com objetos manipuláveis e com software

Questões:

3.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos nos sites:
1. http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#
2. http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/
3. http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx
4. http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html
5. http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR
6. Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet.

3.2.) Representem esses sólidos no papel, material manipulável (quando possível) e no software. O que vocês consideram que acontece de diferente entre essas diferentes mídias? Quais as vantagens e desvantagens vocês consideram pela visualização em cada mídia?

3.3.) Essas representações que vocês escolheram se caracteriza como superfícies ou sólidos de revolução?

3.4.) Identifique superfícies de revolução presentes nas figuras escolhidas. O que vocês podem perceber nessas figuras fora do papel?

3.5.) Vocês poderiam calcular a área dessas superfícies supondo alguns valores? Quais os elementos necessários para o cálculo em cada uma delas?

Objetivos:

- Investigar a capacidade de justificação do aluno;
- Analisar os caminhos e estratégias abordados pelos alunos;
- Investigar e a analisar os conhecimentos matemáticos presentes e desenvolvidos pelo contato e interação entre os alunos na atividade (1);
- Investigar a capacidade e visualização 2D e 3D dos alunos dados os materiais utilizados.

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

ANEXO 5: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 4

unesp Universidade Estadual Paulista "JULIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 4

Trabalhando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução

Questões:

4.1.) Identifiquem algumas superfícies e sólidos de revolução nos sites:

a. http://www.artepropria.com.br/ecommerce/vitrine.php?c=56&g=81&sg=83#
b. http://www.museodelprado.es/es/pagina-principal/coleccion/pintura/pintura-italiana/
c. http://www.mam.org.br/2008/portugues/acervoOnLine.aspx
d. http://www.musee-orsay.fr/es/colecciones/obras-comentadas/pintura.html
e. http://www.louvre.fr/llv/exposition/liste_expositions.jsp?pageId=2&bmLocale=fr_FR
f. Vocês ainda têm a possibilidade de fazer outras buscas pela internet.

4.2.) Vocês poderiam representá-las com material concreto? De que modo?

4.3.) Vocês poderiam representá-las no software? De que modo?

4.4.) Como vocês poderiam calcular a área das superfícies de revolução?

a. Encontrem elementos que geraram as superfícies de revolução.
b. Qual a área aproximada de cada figura?
c. Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real?
d. E se vocês dividissem em n partes?
e. Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular a área de superfícies?

4.5.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução?

a. Encontrem elementos que geraram os sólidos de revolução.
b. Qual o volume aproximado de cada sólido?
c. Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real?
d. E se vocês dividissem em n partes?
e. Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos?
f. Será que vocês poderiam utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

Objetivos: • Investigar a capacidade de justificação do aluno; • Analisar os caminhos e estratégias seguidos pelos alunos; • Investigar a capacidade de visualização frente ao problema • Investigar a capacidade de propor estratégias de resolução dos problemas apresentados.

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

ANEXO 6: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 5

unesp Universidade Estadual Paulista **"JULIO DE MESQUITA FILHO"**
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 5

Identificando o conceito de Integral com superfície e sólido de revolução em dois Artistas Famosos – Leonardo da Vinci e Michelângelo

Questões:

5.) Identifiquem algumas obras famosas de Leonardo da Vinci e Michelângelo, nos sites:

- Michelangelo
  - http://revistaepoca.globo.com/Epoca/0,6993,EPT731774-1661-1,00.html
  - http://www.pintoresfamosos.com.br/?pg=michelangelo
- Leonardo da Vinci
  - http://www.universia.com.br/especiais/davinci/
  - http://www.tg3.com.br/leonardo-da-vinci/

5.1.) Vocês poderiam identificar alguma superfície e sólido de revolução nas obras desses dois Artistas Famosos –Leonardo da Vinci e Michelangelo? Explicitem as suas idéias?

5.2.) Vocês poderiam representá-las no software? De que modo?

5.3.) Como vocês poderiam calcular a área dessas superfícies de revolução?

1. Encontrem elementos que geraram as superfícies de revolução.
2. Qual a área aproximada de cada figura?
3. Se vocês dividissem uma figura em partes, vocês conseguiriam calcular uma área mais próxima da real?
4. E se vocês dividissem em n partes?
5. Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular a área de superfícies?

5.4.) Como vocês poderiam calcular o volume dos sólidos de revolução?

1. Encontrem elementos que geraram os sólidos de revolução.
2. Qual o volume aproximado de cada sólido?
3. Se vocês dividissem um sólido em partes, vocês conseguiriam calcular um volume mais próximo do real?
4. E se vocês dividissem em n partes?
5. Vocês conseguiriam encontrar uma formula geral para calcular o volume dos sólidos?
6. Será que vocês poderiam utilizar outro método para calcular o volume dos sólidos de revolução?

Objetivos:

- Investigar a capacidade de justificação do aluno;
- Analisar os caminhos e estratégias seguidos pelos alunos;
- Investigar a capacidade de visualização frente ao problema
- Investigar a capacidade de propor estratégias de resolução dos problemas apresentados.

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

ANEXO 7: ATIVIDADE EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA 6

unesp Universidade Estadual Paulista **"JULIO DE MESQUITA FILHO"**
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

CONJUNTO DE ATIVIDADES ELABORADAS PARA SEREM APLICADA À COLETA DE DADOS DA DISSERTAÇÃO:

PROCESSOS DE VISUALIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE CONCEITOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM UM *SOFTWARE* TRIDIMENSIONAL

Mestranda: Carolina Augusta Assumpção Gouveia
Orientadora: Profa. Dra. Rosana G. S. Miskulin
Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – UNESP/RC

Atividade 6

Ensinando conceitos de superfície e sólido de revolução

Questões:

1.) Se vocês fossem ensinar esses conceitos de Cálculo Diferencial e Integral para os seus alunos ou mesmo para os seus colegas, como vocês elaborariam um Projeto – Plano de Aula com as imagens escolhidas por vocês?

Objetivos:
- Investigar o conhecimento de superfície e sólidos de revolução;
- Analisar os caminhos e estratégias escolhidos pelos alunos;
- Investigar a capacidade de propor novos problemas e possíveis estratégias de soluções.
- Investigar os aspectos relacionados à Metodologia de Projetos

Atores da pesquisa: Grupos de alunos da turma de Cálculo I – Matemática

APÊNDICE

MANUAL K3DSURF

K3DSurf

Conteúdo

K3DSurf – UM AMBIENTE COMPUTACIONAL PARA EXPLORAÇÃO DE VISUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES

BREVE APRESENTAÇÃO DO *SOFTWARE*

➔ K3DSurf é um ambiente computacional propício para visualizar e manipular modelos matemáticos em três, quatro, cinco e seis dimensões.

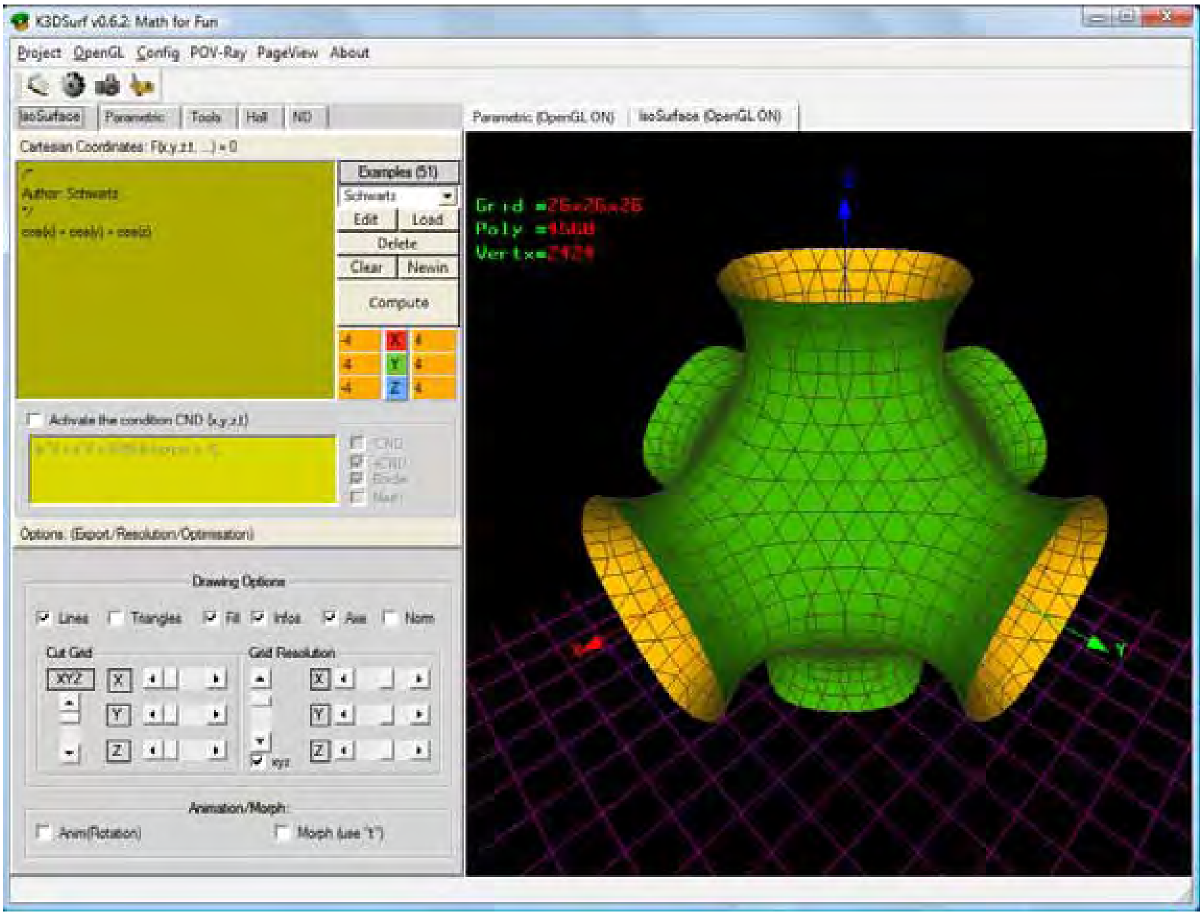


Figura 78: Tela principal do *software* K3DSurf

➔ Site: http://k3dsurf.sourceforge.net/

➔ K3DSurf foi criado por Abderrahman Taha, que proporciona ao usuário ferramentas que permitem a visualização e manipulação de superfícies multidimensionais por meio de equações matemáticas.

➔ O usuário do *software* poderá visualizar funções matemáticas em três dimensões (3D), quatro dimensões (4D), cinco dimensões (5D) e seis dimensões (6D) e, desta forma, rotacionar, tranformar (morfar) e escalonar esses objetos para maior entendimento da forma como a equação é representada no espaço. A função pode ser inserida em sua forma f(x,y,z,...) = 0 ou da forma de funções paramétricas.

➔ Nos endereços eletrônicos http://k3dsurf.sourceforge.net/ ou http://superdownloads.uol.com.br/download/93/k3dsurf-windows/, o usuário poderá fazer o download do *software* K3DSurf na versão livre.

ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS PRESENTES NO TRABALHO COM O *SOFTWARE*

➔ SUPERFÍCIE:

- MICHAELLIS (2009) conceitua superfície como: 1 Extensão expressa em duas dimensões: comprimento e largura. 2 A parte exterior ou face dos corpos. 3 Geom O que circunscreve os corpos; os limites de um corpo; o comprimento e a largura considerados sem profundidade; extensão da face ou do conjunto das faces que limitam um corpo; extensão de uma área limitada. *S. cilíndrica:* superfície gerada por uma reta que se move, conservando-se paralela a uma direção dada e apoiando-se constantemente sobre uma linha fixa (Maeder). *S. de nível:* superfície equipotencial de um campo de forças. *S. de onda:* superfície que num dado instante contenha partículas do meio na mesma fase de vibração. *S. de revolução, Mat:* a gerada pela rotação de uma linha em torno de uma reta fixa, à qual ela se acha invariavelmente ligada (Maeder). *S. desenvolvível, Mat:* a que, suposta flexível mas inextensível, pode ser estendida sobre um plano sem dobras nem rupturas (Maeder). *S. empenhada:* a do polígono cujos lados não estão no mesmo plano. *S. equipotencial:* o lugar dos pontos em que o potencial assume o mesmo valor. *S. esférica, Mat:* lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de um ponto fixo (Maeder). *S. piezométrica:* a superfície imaginária a que sobe a água subterrânea sob pressão hidrostática em poços ou fontes; nível hidrostático. *S. plana:* superfície sobre a qual se pode aplicar uma linha reta em todos os sentidos ou direções. *S. planificável:* a que se pode desenvolver em um plano. *S. poliédrica:* a formada por polígonos planos, tendo dois a dois um lado comum, que se dizem respectivamente faces e arestas. *S. regulada* ou *retilínea, Mat:* a que tem como geratriz uma reta (Maeder). *S. reversa, Mat:* a que, suposta flexível mas inextensível, não pode ser estendida sobre um plano sem dobras nem rupturas (Maeder). *S. toroidal:* a que se obtém fazendo girar uma circunferência em volta de uma reta externa a ela, mas situada em seu plano (*ex:* a câmara-de-ar). *Conhecer na* (ou *pela*) *superfície:* ter apenas algumas idéias ou noções esparsas de um assunto.

Uma definição matemática minuciosa sobre superfície tomaremos por base os conceitos determinados por CARDOSO (2007, p.430), que define:

- Superfície como a figura geométrica gerada por uma linha que se desloca no espaço, podendo manter invariável ou não em forma e grandeza, segundo uma lei determinada.
- As superfícies podem ser definidas geometricamente (possuindo mesma geratriz[52]) ou por uma propriedade comum a todos os seus pontos.

[52] Geratriz é a reta que se desloca e diretriz é a linha sobre a qual a geratriz se apóia.

- Superfícies são classificadas por Cilindrica, Cônica, de revolução e Esférica. Para o nosso estudo, descreveremos as Superfícies de Revolução.
- Superfície de Revolução é a superfície gerada pela rotação de uma linha em torno de uma reta fixa (eixo de revolução) à qual ela se acha invariavelmente ligada.

- Os livros de Cálculo Diferencial e Integral trazem definições e modos de calcular a área de uma superfície de revolução.

➔ VOLUME:

- MICHAELLIS (2009) conceitua volume como: **1** Embrulho, fardo, pacote, maço, rolo, trouxa. **2** Livro, encadernado ou brochado. **3** Tomo. **4** Entre os antigos, manuscrito enrolado em volta de um pau cilíndrico. **5** Grandeza, tamanho, corpulência, desenvolvimento. **6** Massa, quantidade. **7** Extensão da voz. **8** Porção de água que corre num rio, numa fonte etc. **9** *Geom* O espaço ocupado por um corpo. **10** *Mec* O produto da massa pela densidade. **11** *Mús* A massa de som produzido por uma voz ou por instrumento. *V. específico:* a) volume por unidade de massa de uma substância; b) a recíproca da densidade.

O conceito de volume, também é apresentado por CARDOSO (2007, p.475), que define:

- O volume de um corpo é o espaço ocupado pelo referido corpo. A unidade utilizada nos cálculos do volume são as unidades cúbicas.
- Todos esses corpos estarão no espaço tridimensional.
- O volume pode ser gerado por uma figura e um eixo de revolução situados em um mesmo plano, de modo que o eixo não atravesse a figura nem lhe seja perpendicular. Nesse caso dizemos ser um sólido de revolução.

- Os livros de Cálculo Diferencial e Integral trazem definições e modos de calcular o volume do sólido de revolução.

➔ ESPAÇOS COM MAIS DE TRÊS DIMENSÕES

- Apesar de, neste momento, focarmos as figuras tridimensionais, ou seja, inseridas no espaço com três dimensões (3D), encontraremos no *software* trabalhado, a possibilidade de trabalhar mais de três dimensões. Lima (1998) discute um pouco essa idéia em seu livro e nós relataremos um pouco sobre este trabalho feito pelo autor.
- Temos que R é o modelo aritmético de um eixo, R^2 é o modelo aritmético de um plano munido de um sistema de eixos e R^3 é o modelo aritmético do espaço euclidiano habitual, no qual foi fixado um sistema de eixos ortogonais. Já em quatro dimensões, falta-nos a visão geométrica com base experimental pois o espaço em que vivemos é apenas tridimensional. (LIMA, p.62)
- Uma reta r em R^4 é determinada por um ponto A = (a,b,c,d) e um vetor v = (m,n,p,q). Tem-se $r = \{A+\alpha.v;\ \alpha \in R\}$. (LIMA, p.62)

➔ FUNÇÕES

- Uma função pode expressar uma relação de interdependência, uma relação de causa e efeito ou uma correspondência bem definida. (GONÇALVES e CHUEIRI, 2008, p.11)
- Deve estar claro o que corresponde uma função e os tipos de função que podem ser trabalhas no *software*.
- Seguindo a conceituação dada por Gonçalves e Chueiri (2008, p.14) vamos explicitar as funções de uma variável, porém, quando voltarmos ao *software* focaremos o trabalho com duas variáveis, podendo também utilizar até 5 variáveis.
- Temos que f é uma função real de uma variável x, logo denotamos f(x) = y. Se a variável y está isolada, dizemos que está na forma explícita, mas se temos F(x,y) = 0 a função encontra-se na forma implícita. Esta última forma será utilizada no *software* K3DSurf com n variáveis, ou seja, F(x,y,z,t,...) = 0.
- Os conceitos de função/equação reduzida e paramétrica também são importantes, dado que o *software* permite o trabalho com essas duas funções. O site Só Matemática descreve de forma simples as duas formas de equações:

  - Equações paramétricas: São equações equivalentes à equação geral da reta, da forma x= f(t) e y= g(t), que relacionam as coordenadas x e y dos pontos da reta com um parâmetro **t.**
    Assim, por exemplo,

    $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, são equações paramétricas de uma reta **r.**

    Para obter a equação geral dessa reta a partir das paramétricas, basta eliminar o parâmetro **t** das duas equações:

    $x = t + 2 \Rightarrow t = x - 2$

    Substituindo esse valor em y = - t + 1, temos:

    $y = -(x - 2) + 1 = -x + 3 \Rightarrow x + y - 3 = 0$ (equação geral de **r**)

  - Equação Reduzida: Considere uma reta r não-paralela ao eixo **Oy**:

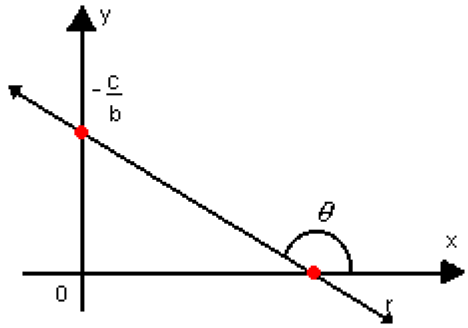


Figura 79: Representação da equação ax + by + c = 0

Isolando **y** na equação geral ax + by + c = 0, temos:

$$by = -ax - c \Rightarrow -\frac{a}{b}.x - \frac{c}{b}$$

Fazendo

$$-\frac{a}{b} = m \quad \text{e} \quad -\frac{c}{b} = q$$, vem:

Y = mx + q é chamada equação reduzida da reta, em que

$$m = -\frac{a}{b}$$

fornece a inclinação da reta em relação ao eixo **Ox**.
Quando a reta for paralela ao eixo **Oy**, não existe a equação na forma reduzida.

TUTORIAL

No site http://k3dsurf.sourceforge.net/ encontram-se orientações iniciais sobre o *software* K3DSUrf que são apresentadas no início dessa sessão. Para permitir ao usuário um melhor trabalho, sentiu-se necessário inserir informações complementares sobre instalação e utilização do *software*.

➔ RECURSOS

- Visualização interativa com auxílio do mouse
- Animação em tempo real (rotação) e morph (mudança na representação pela introdução de novas variáveis em uma equação dada anteriomente)
- Criação de um filme de animação gráfica (suporta os formatos VRML2 e Povscript)

➔ POSSÍVEIS UTILIZAÇÕES

- Pode ser utilizado por todos os interessados em representações de equações matemáticas em 3D.
- Não requer quaisquer competências especiais pelos usuários.
- É um programa desenvolvido para ser utilizado por usuários iniciantes da licenciatura em Matemática, já contendo mais de 50 exemplos.
- Adiciona e remove algumas funções a partir de equações matemáticas, permitindo ao usuário visualizar novos resultados para compreender melhor o comportamento de funções matemáticas.
- 2D e 3D Designers: Pov scripts (e outros formatos de arquivo) gerados por K3DSurf também podem ser integradas em cenas complicadas.
- Também permite o estudo mais avançado com representações em 4D e 5D.

➔ FUNÇÕES DEFINIDAS NO K3DSurf

Função	Simbologia
Seno	Sin()
Cosseno	Cos()
Tangente	Tan()
Arco Seno	Asin()
Arco Cosseno	Acos()
Arco Tangente	Atan()
Seno Hiperbólico	Sinh()
Cosseno Hiperbólico	Cosh()
Tangente Hiperbólica	Tanh()
Inversa do Seno Hiperbólico	Asinh()
Inversa do Cosseno Hiperbólico	Acosh()
Inversa do Tangente Hiperbólica	Atanh()
Logaritmo Natural	Log()
Logaritmo na base 10	Log10()
Anglo	Angle()
Valor Absoluto (= Magnitude)	Abs()
Secante (= 1/cosseno)	Sec()
Cossecante (= 1/seno)	Csc()
Cotangente (= 1/tangente)	Cot()
Módulo	Mod()
Raiz Quadrada	Sqtr()
Exponencial	Exp()
Min (A,B)	Min(A,B)
Max (A,B)	Max(A,B)
Arredondar para o inteiro	Int()

mais próximo	
Contante	PI

Figura 80: Funções matemáticas definidas no *software*

➔ ANIMAÇÃO E MORF

- Animação consiste na rotação do objeto em 3D. A direção e a velocidade de rotação são controlados pelo mouse.
- Morph consiste na introdução do novo parâmetro t dentro equações paramétricas.

➔ INSTALAÇÃO

- Acesse o site: http://k3dsurf.sourceforge.net/
- Faça o download do K3DSurf, de acordo com o sistema operacional presente no computador, salvando o arquivo K3dsurf-062.
- Execute o arquivo K3dsurf-062 e siga as instruções de instalação.

➔ INICIANDO

- No menu iniciar/todos os programas escolha a pasta K3DSurf 0.6.2
- Clique em K3DSurf-0.6.2 e o *software* será iniciado.

➔ COMO UTILIZAR OS COMANDOS PRESENTES NO *SOFTWARE*

Ao iniciar o *software*, o usuário depara-se com um visual tal como está representada pela Figura 81.

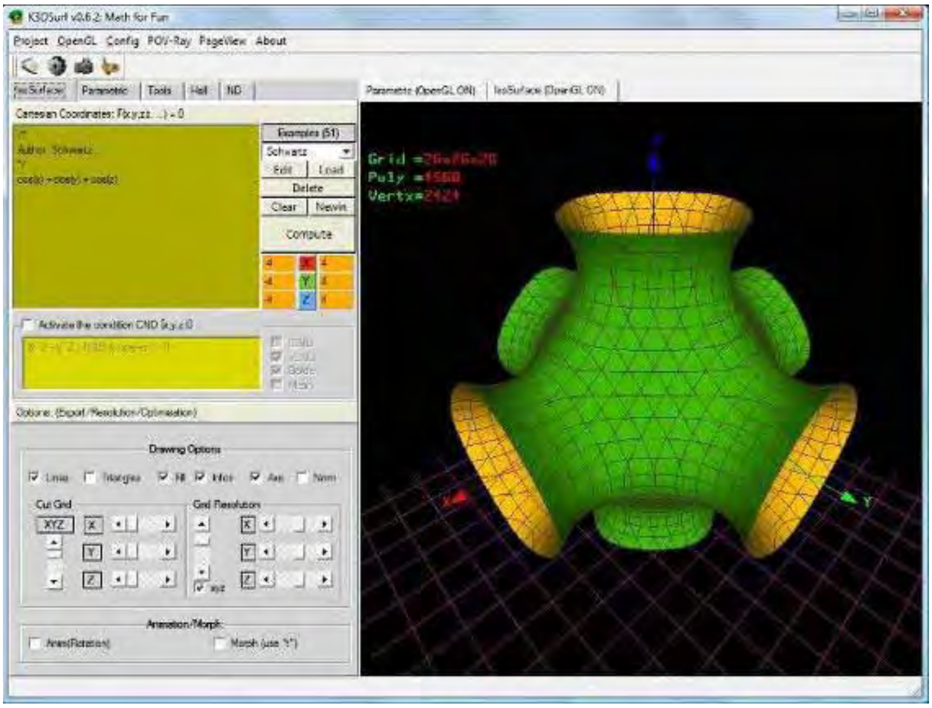


Figura 81: Tela Inicial

Para entender melhor a utilização do K3DSurf, explicaremos as funcionalidades de cada elemento representados pelas Figura 82, Figura 83, Figura 84 e Figura 85, buscando estendê-las.

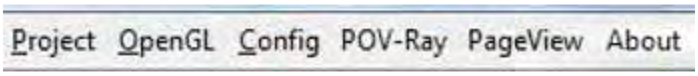


Figura 82: Menu

A figura 82 representa o menu do *software*, com funcionalidade:

- Project – contém as opções abrir projeto, novo projeto e fechar projeto
- OpenGL – habilita as opções de linha de grade, linha e superfície da representação
- Config – permite modificar as configurações do arquivo para salvá-lo
- POV-Ray – permite abrir uma animação gráfica e mudar as configurações da tela que rodará a animação
- PageView – habilita as telas com os recursos que veremos em detalhes na figura 5
- About – disponibiliza endereços de páginas web para consulta ao tutorial e fóruns de discussão de usuários do *software*.


Figura 83: Ícones

Já na figura 83, os quatro itens respectivamente, representam:

- Edição do projeto elaborado
- Controle que permite modificar variáveis pertencentes a representação
- Representação estática
- Permite mudar as cores dos elementos contidos na função representada

A Figura 84 e a Figura 85 representam, respectivamente, o conteúdo e a representação da função a ser trabalhada. Os recursos utilizados e as modificações feitas nos itens representados pela Figura 84 serão refletidas na Figura 85.

Figura 84: Recursos IsoSurface

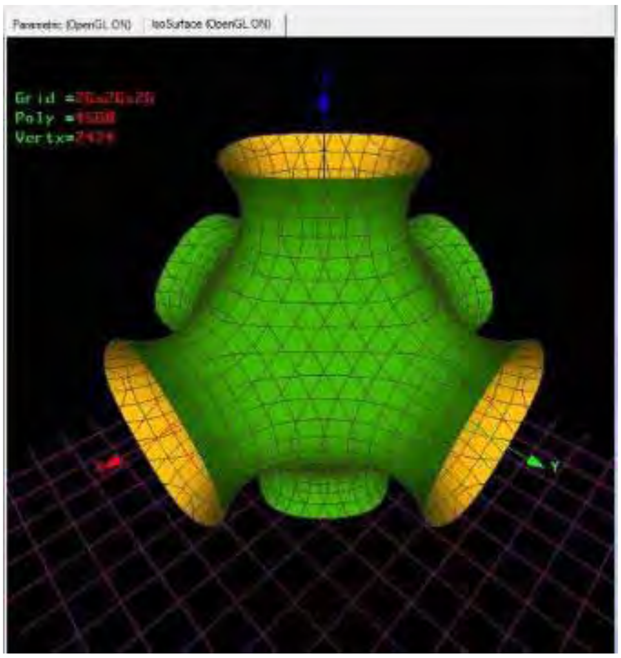


Figura 85: Representação

Para esclarecer melhor o funcionamento do *software*, vamos explicitar cada recurso presente nas seguintes telas:

- **IsoSurface** permite inserir a função na forma implícita.
  - Figura 86 – permite inserir a função implícita desejada.
  - Figura 87 – botões que permitem ações, tais como: visualizar alguns exemplos disponibilizados pelo *software* e também botões de configuração ou modificação da função.
  - Figura 88 – o *software* permite inserir condições na representação da função.
  - Figura 89 – permite modificar opções do gráfico da função, tais como as linhas da superfície, cor da superfície, os eixos x, y e z, cor da superficie
  - Figura 90 – permite modificar a resolução do gráfico e o intervalo de cada um dos eixos
  - Figura 91 – permite colocar uma animação gráfica na representação da função.

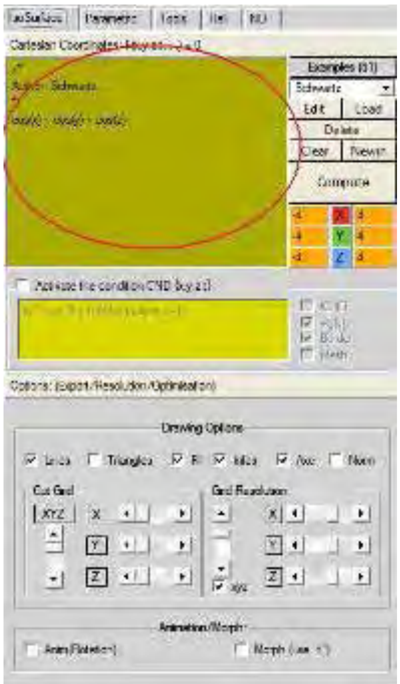


Figura 86: Inserir função

Figura 87: Computar função

Figura 88: Inserir condições nas funções

Figura 89: Opções na área visualizada

Figura 90: Modifica extensão da área visualizada

Figura 91: Animação da representação

- **Parametric** permite inserir a função na forma paramétrica. Essa função é independente da função feita em IsoSurface e também possui tela de representação independente. (Figura 92)
    - Function Def (função definida), Second System (sistema secundário), Z^n, 4D HiperObject, Spherical Coordenates (coordenadas esféricas), Cylindrical Coordenates (coordenadas cilíndricas)e Options (opções), são as possíveis opções para inserir a função paramétrica desejada.
    - Os demais elementos contidos nesta tela já foram explicitados na tela IsoSurface.

- Tools – quando ativado, permite inserir ou modificar uma função IsoSurface ou Parametric, bem como modificar a escala de um dos eixos desejados e também rotacionar as linhas do gráfico, contorcendo o objeto. (Figura 93)

- Hall – permite modificar valores para representação da função. (Figura 94)

- ND – quando ativado, permite trabalhar com funções em 5 dimensões, porém conservando a representação 3D. (Figura 95)

Figura 92: Inserir equações paramétricas

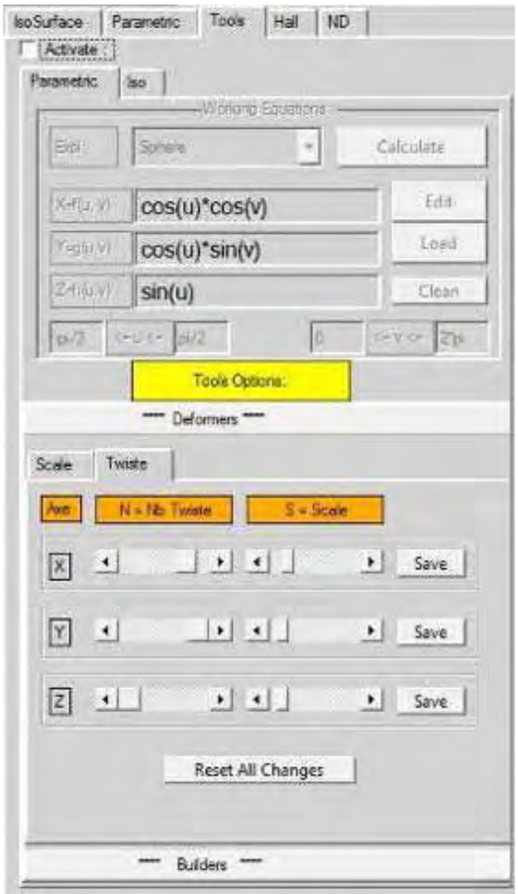


Figura 93: Tools

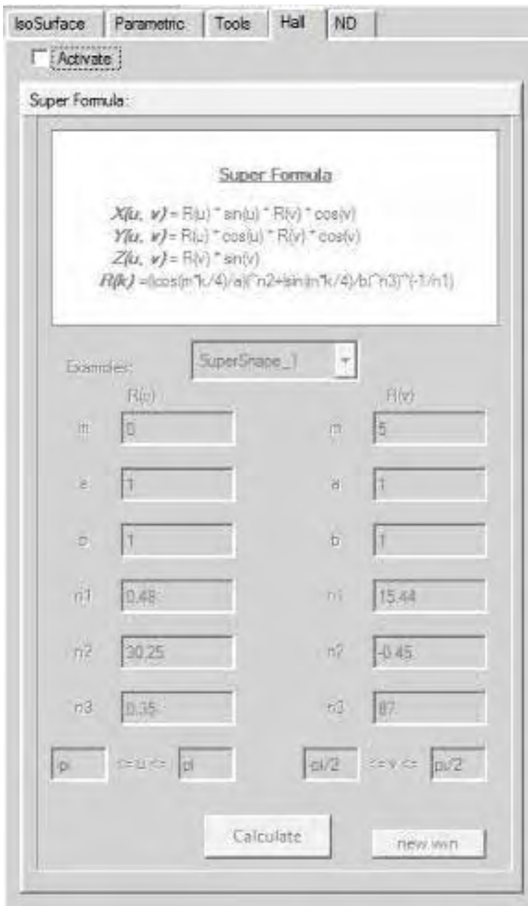


Figura 94: Hall

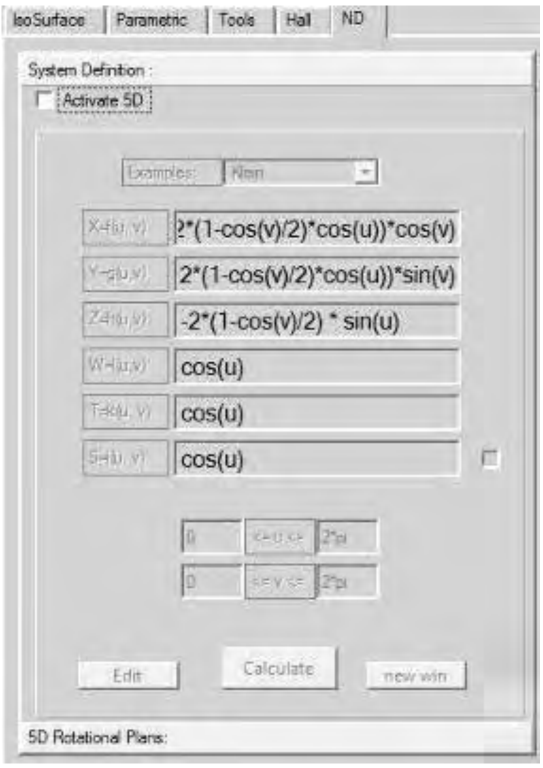


Figura 95: ND

POR QUE UTILIZAR O *SOFTWARE* K3DSurf NO CONTEXTO EDUCACIONAL?

- ➔ A visualização de equações matemáticas representadas no espaço, por meio do *software*, permite uma representação mais real da equação, quando comparadas com as representações que fazemos a mão livre. Assim, o aluno ou o professor é capaz de perceber melhor a relação da representação com dada equação.
- ➔ O *software* também permite que a representação de uma equação matemática seja visualizada por todas as suas perspectivas. O usuário do *software* pode rotacionar os eixos para mudar a posição do gráfico.
- ➔ A representação de equações matemáticas traz consigo uma visão diferenciada dos conceitos matemáticos presentes em uma determinada equação.

BIBLIOGRAFIA

CARDOSO, Luiz Fernandes. **Dicionário de Matemática.** Porto Alegre, L&PM, 2007.

GONÇALVES, Eliete Maria; CHUEIRI, Vanilda Miziara Mello. **Funções Reais de uma Variável Real.** São Paulo, Cultura Acadêmica: Universidade Estadual Paulista, Pró-Reitoria de Graduação, 2008.

K3DSURF. Disponível em http://k3dsurf.sourceforge.net/. Acesso em: 28 nov. 2008.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Espaço.** Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

MICHAELLIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa.** Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=superfície>. Acesso em: 4 fev. 2009.

SÓ MATEMÁTICA. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/emedio/retas/retas6.phtml>. Acesso em: 4 fev. 2009.