

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Computação - FACOM

Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação

**Simulação Gráfica de Buracos Negros
utilizando
Sistemas de Partículas**

Autor: Douglas Farias Cordeiro

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Celia A. Zorzo Barcelos

Uberlândia – Março de 2009



**FACULDADE DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**



Douglas Farias Cordeiro

**Simulação Gráfica de Buracos Negros
utilizando
Sistemas de Partículas**

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.
Área de concentração: Computação Gráfica.

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celia Aparecida Zorzo Barcelos

Uberlândia – Março de 2009

Douglas Farias Cordeiro

Simulação Gráfica de Buracos Negros utilizando Sistemas de Partículas

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Computação da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Área de concentração: Computação Gráfica.

Aprovação em 17 de março de 2009.

Banca Examinadora:

Orientadora:

Dr^a. Celia Aparecida Zorzo Barcelos – UFU

Avaliador 1:

Dr. Fabrício Simeoni de Sousa – USP

Avaliador 2:

Dr. Afonso Paiva Neto – UFU

Uberlândia – Março de 2009

Certamente, ele tomou sobre si as nossas enfermidades e as nossas dores levou sobre si; e nós o reputávamos por aflito, ferido de Deus e oprimido. Mas ele foi traspassado pelas nossas transgressões e moído pelas nossas iniquidades; o castigo que nos traz a paz estava sobre ele, e pelas suas pisaduras fomos sarados.

Is. 53:4,5.

*Para minha querida esposa, Jisele,
a quem dedico todo meu amor...*

Rei de Israel, de Abraão, Jacó e Isaque,
de onde meu desconhecido paira e ousa andar,
te louvo por cada palavra aqui construída,
por cada página aqui criada,
por todo este caminho percorrido.

*Te louvo ainda por que me deste meus pais, Valter e Cida
a quem posso contar e confiar sempre.*

*Me deste minha irmã, Michelly,
que é meu refúgio e minha felicidade.*

*Te exalto, Rei dos Reis,
pois justamente em meu caminho
colocaste a flor mais bela que eu poderia ter,
minha única e amada esposa Jisele.*

Te agradeço, Mestre dos Mestres
pois comigo deste minha orientadora, Celia,
a quem colocaste sabedoria e paciência
durante cada pedra do caminho.
Te agradeço, pois me deste ainda mais,
meu conselheiro, amigo, cúmplice,
a quem usaste como anjo fiel,
o professor de meus devaneios e delírios,
o mestre de minha realidade, Marcos.

*Te engrandeço, Jeová Jiré,
pois me destes amigos fiéis e únicos
Eduardo, companheiro em todos os momentos,
amigo de grande valor,
Núbia, a quem confio em cada gesto,
e me alegro até mesmo na dor.
Roosevelt, a quem me escuta,
me orienta e me confidencia o secreto.
Meus caros amigos científicos,
Robson e Vinícius, com quem aprendi a caminhar.
Meus irmãos em teu Corpo,
inumeráveis são,
Alexandre, Ana Paula, Fernando, Guilherme,
e tantos outros que ao meu lado estão.*

*Em ti confio meu Senhor, e a Ti
elevo tudo o que sou....*

Resumo

A aplicação da Computação Gráfica na simulação de fenômenos da natureza tem apresentado, desde sua criação, uma série de propostas, que ao longo dos anos vem ganhando um caráter que as aproxima mais da realidade, tanto visualmente quanto através das estratégias de abstração utilizadas. Entretanto, a aplicação específica desta área da Ciência da Computação para a simulação de fenômenos astrofísicos fisicamente baseados ainda permanece como algo restritamente explorado, embora a Computação Gráfica seja considerada como uma importante ferramenta de auxílio a síntese de imagens obtidas via satélite e na indústria cinematográfica. Neste sentido, esta área de simulação gráfica permanece em aberto sob diversos aspectos, denotando uma necessidade de concepção de modelos de simulação para os fenômenos descritos pela Astrofísica. Nesta dissertação será apresentado um modelo de simulação gráfica de Buracos Negros, um dos fenômenos mais misteriosos conhecidos pelo homem, através da utilização da técnica de representação Sistemas de Partículas e do método de aproximação *Smoothed Particle Hydrodynamics*, tornando possível a observação deste fenômeno e sua aplicação na concepção de animações.

Palavras-chave: Dinâmica Celeste. Sistema de Partículas. *Smoothed Particle Hydrodynamics*. Buraco Negro. Simulação Gráfica. Computação Gráfica.

Abstract

The application of Computer Graphics tools in the nature phenomena simulation have been presenting a series of proposals since its creation. Over the years this task has gained a characteristic trait that makes it closer to the reality, both visually as by the abstraction strategies used. However, the specific application of this Computer Science area for the astrophysical phenomena simulation remains as something restricted explored, although the Computer Graphics is considered as an important tool to aid the synthesis of satellite images and the film industry. Accordingly, this graphical simulation area remains open in several ways, showing a need for development of simulation models for the phenomena described by Astrophysics. This dissertation presents a graphical simulation model of Black Holes, that is one of the most mysterious phenomena known by man, through the use of Particle Systems representation techniques and the approximation method *Smoothed Particle Hydrodynamics*, making possible this phenomenon observation and its application in the animations design.

Words-key: Celestial Dynamics. Particle System. Graphic Simulation. Black Hole. Computer Graphics.

Sumário

Lista de Figuras	xv
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Motivação	2
1.3 Objetivos	3
1.4 Contribuição	3
1.5 Organização da Dissertação	4
2 Sistemas de Partículas:	
A Caricatura Gráfica do Caos	5
2.1 O Gênesis de <i>Jornada nas Estrelas</i>	6
2.2 A Modelagem Através de Sistemas de Partículas	7
2.2.1 Propriedades de Partículas	8
2.2.2 O Nascimento de Uma Partícula	9
2.2.3 A Morte de Uma Partícula	11
2.2.4 Dinâmica de um Sistema de Partículas	11
2.2.5 Hierarquização de um Sistema de Partículas	12
2.3 Conclusão	13
3 Simulações Astrofísicas na Computação Gráfica	15
3.1 Introdução	15
3.2 Simulação dos Anéis de Saturno	16
3.3 Simulação da Aurora Boreal	17
3.4 Conclusão	18
4 O Método de Aproximação	
<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>	19
4.1 Introdução	19
4.2 As principais características do método SPH	20
4.3 Núcleo de Suavização e Interpolação	22
4.4 Aplicação do SPH para Derivadas Espaciais	24

4.5	Conclusão	26
5	Aplicações do método SPH	27
5.1	Introdução	27
5.2	SPH como ferramenta de simulação de fenômenos astrofísicos	28
5.3	A Utilização do SPH para Representação de Buracos Negros	29
5.4	Utilização do SPH para mecânica dos sólidos	32
5.5	A simulação gráfica de fluidos utilizando SPH	32
5.6	Conclusão	37
6	A Física dos Buracos Negros	39
6.1	Introdução	39
6.2	A Teoria da Luz e as Primeiras Indagações sobre Buracos Negros	40
6.3	A Exploração Pós-Criação da Teoria da Relatividade	42
6.3.1	Os Buracos Negros de Schwarzschild	42
6.3.2	O Limite de Chandrasekhar	43
6.4	Horizonte de Eventos	44
6.5	“Entropia” de Buracos Negros	45
6.6	A Radiação de Hawking	47
6.7	Conclusão	49
7	Um Modelo de Simulação Gráfica de Buracos Negros Utilizando Sistemas de Partículas e Smoothed Particle Hydrodynamics	51
7.1	Introdução	51
7.2	Aplicação do SPH na Simulação de Discos de Acresção	52
7.2.1	Abstração das Características Físicas dos Discos de Acresção	52
7.2.2	Aplicando o Método SPH para Obtenção das Forças Hidrodinâmicas . .	53
7.3	Aplicação de Sistemas de Partículas para Simulação da Radiação de Buracos Negros	56
7.3.1	Sistemas de Partículas e a Simulação de Radiação	56
7.3.2	O Modelo de Representação <i>Sistemas de Partículas Virtuais</i> : Uma Proposta	57
7.3.3	<i>Sistemas de Partículas Virtuais</i> na Simulação da Radiação de Buracos Negros	57
7.4	Simulação Gráfica de Buracos Negros	59
7.4.1	A API OpenGL	59
7.4.2	Aproximações Físicas	60
7.4.3	Implementação	61
7.4.4	Inicialização das Variáveis do Sistema	61
7.4.5	Evolução do Sistema	64
7.4.6	Visualização	66
7.5	Resultados	67
7.6	Validação da Proposta	68
7.6.1	Dificuldades Encontradas	74

8 Conclusão e Trabalhos Futuros	77
Referências bibliográficas	79

Listas de Figuras

2.1	Seqüência de imagens da cena Efeito Gênesis do filme <i>A Ira de Khan</i>	6
2.2	Forma de geração esférica.	9
2.3	Forma de geração circular.	10
2.4	Forma de geração retangular com variação de escape.	10
2.5	Representação de uma chama utilizando Sistemas de Partículas.	12
3.1	Simulação dos Anéis de Saturno [Blinn 1982].	17
3.2	Comparação entre uma imagem real da Aurora Boreal e o resultado obtido por [Baranoski et al. 2000].	18
4.1	Exemplo da ação de um núcleo de suavização.	22
5.1	Simulação de anãs brancas em encontro com Buracos Negros. [Rosswog et al. 2008]	29
5.2	Resultados apresentados por [Lee and Klužniak 1999] do processo de colapso entre uma Estrela de Nêutrons e um Buraco Negro. As imagens do lado esquerdo mostram os contornos de densidade em um plano orbital, enquanto as imagens do lado direito apresentam resultados em um plano meridional.	31
5.3	Simulação de derretimento de um objeto sólido usando SPH [Paiva et al. 2006].	33
5.4	Exemplo de animação artística de fluido utilizando SPH. ©New Line Cinema. .	33
5.5	Simulação interativa de fluidos utilizando SPH [Müller et al. 2003a].	34
5.6	Simulação de fluxos sanguíneos através de SPH.	36
6.1	Representação dos cones de luz na presença de Buracos Negros.	45
6.2	Variação da área do horizonte de eventos: absorção de matéria ou energia pelo Buraco Negro e colapso entre dois Buracos Negros.	46
6.3	Comportamento de partículas virtuais na presença de um Buraco Negro. . . .	48
7.1	Curva da função peso para um valor $h = 3$	54
7.2	Exemplo da aplicação de Sistemas de Partículas para simulação de Corpos Negros.	56
7.3	Comportamento das partículas virtuais na proposta de <i>Sistemas de Partículas Virtuais</i>	58
7.4	Diagrama de execução para o módulo de simulação do disco de acresção. . . .	62

7.5	Descrição geométrica das partículas do sistema e aplicação de mapeamento de textura.	67
7.6	Simulação do disco de acresção de um Buraco Negro através da aplicação do SPH com 2000 partículas.	68
7.7	Visão interna da simulação proposta.	69
7.8	Simulação da emissão de radiação pelo Buraco Negro através de um Sistema de Partículas com 1000 partículas.	69
7.9	Gráfico da relação entre quantidades de partículas e quadros por segundo.	70
7.10	Gráfico da relação entre quantidades de partículas e o tempo de CPU demandado.	70
7.11	Comparação entre os resultados obtidos e os resultados apresentados em [Gerardi et al. 2005] para o número Mach.	73
7.12	Comparação entre os resultados obtidos e os resultados apresentados em [Gerardi et al. 2005] para a velocidade radial.	73

Introdução

1.1 Introdução

A necessidade de representação do real e imaginário sempre foi um grande desafio para o ser humano e, através do surgimento da Computação Gráfica, essa necessidade pode ser satisfeita de uma forma completamente diferente do que era considerado o habitual, permitindo a interação humana, a previsão de acontecimentos e a aproximação do real de uma quase que inimaginável. Essa característica pode ser observada tanto na exploração de efeitos utilizados com fins artísticos, ou mesmo na concepção de simulações científicas, podendo ambas estratégias interagirem entre si. Neste sentido, diversas técnicas foram sendo criadas ao longo da história da Computação Gráfica, explorando conceitos computacionais, físicos e matemáticos.

Um dos principais exemplos desta evolução foi observado durante a primeira metade da década de 1980, quando William Reeves apresentou a técnica Sistemas de Partículas [Reeves 1983]. Em sua proposta, Reeves, motivado pela necessidade de representação de fenômenos *fuzzy*, ou seja, fenômenos que não podem ser graficamente representados por superfícies determinísticas, utilizou conceitos da Computação Gráfica em conjunto com funções de aleatoriedade e leis físicas, o que permitiu a elaboração de uma técnica poderosa na simulação de tais fenômenos. Além disso, o conjunto de características apresentado pela técnica, principalmente no que se refere à “independência” de ações entre partículas, permitiu a utilização de diversas aproximações, facilitando o processo de computação dos modelos desenvolvidos.

A partir desta técnica, uma série de fenômenos da natureza como, por exemplo, fogo, chuva, neve, superfícies líquidas, entre outros, puderam ser simulados através da Computação Gráfica, permitindo inclusive a exploração de complexas leis de descrição de determinados tipos de fenômenos. Além da técnica proposta por Reeves, inumeráveis outros modelos de representação foram sendo apresentados durante o processo evolutivo da Computação Gráfica, explorando diferentes tipos de problemas e estratégias de solução. Um exemplo de considerável importância neste processo refere-se aos métodos desenvolvidos para a representação de fluidos, os quais utilizam, principalmente, as Equações de Navier-Stokes em seu processo de abstração, o que permitiu uma notável evolução dos métodos da Computação Gráfica, aliados à técnicas provenientes da Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC).

Esta dissertação tem por objetivo apresentar uma proposta de simulação gráfica de Buracos

Negros, através de um conjunto de técnicas que interdisciplinam conceitos físicos, matemáticos e computacionais, se emergindo em uma área da Computação Gráfica restritamente explorada: a simulação gráfica de fenômenos astrofísicos. Neste sentido, o trabalho desenvolverá uma revisão a cerca dos principais conceitos referentes às técnicas de Sistemas de Partículas e *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), um modelo de aproximação consagrado no âmbito da simulação gráfica de fluidos. A partir disso, será apresentada a proposta de simulação, explorando detalhes que vão desde a abstração do fenômeno até a sua implementação, incluindo gráficos comparativos, de escalabilidade e os resultados alcançados.

1.2 Motivação

A utilização da Computação Gráfica relacionada a fenômenos astrofísicos tem se apresentado, diante da constante evolução de conceitos referentes a Astrofísica e ciências correlatas, como uma poderosa ferramenta de acompanhamento do comportamento de tais fenômenos, principalmente através da reconstrução de imagens obtidas via satélite e auxílio ao controle de expedições não tripuladas. Entretanto, a aplicação da Computação Gráfica para fins de simulação de fenômenos astrofísicos ainda se mantém bastante restrita, tendo apresentado poucos trabalhos ao longo de seu histórico evolutivo, entre os quais destacam-se o modelo de Sistemas de Partículas [Reeves 1983], a representação dos anéis de Saturno [Blinn 1982] e a simulação da Aurora Boreal [Baranoski et al. 2000]. Neste sentido, o caso específico da simulação de Buracos Negros se destaca como algo inédito neste campo de exploração da Computação Gráfica, principalmente no que refere-se a utilização do modelo de aproximação SPH como ferramenta de aproximação durante o processo de abstração destes corpos.

Por outro lado, a Astrofísica tem revelado o SPH como um método consagrado de aproximação numérica para uma série de fenômenos como, por exemplo, na simulação da evolução de impacto de asteróides [Bruesch and Asphaug 2002], na representação de eventos relacionados à formação e comportamento de galáxias [Maller et al. 2006; Nagamine et al. 2008], formação de estrelas [Stamatellos et al. 2007], e, inclusive, em fenômenos que envolvem a presença de Buracos Negros [Lee and Klužniak 1999; Hayasaki et al. 2008].

A partir disso surge a possibilidade de buscar nas aplicações do SPH na Astrofísica, particularmente para efeitos relacionados a Buracos Negros, uma forma de projetar e implementar um sistema de simulação gráfica destes corpos, adequado aos preceitos da Computação Gráfica. Neste sentido, este trabalho se propõe a desenvolver tal sistema de simulação gráfica, explorando técnicas de representação baseadas em partículas, as quais se adéquam de modo satisfatório à representações gráficas baseadas em SPH, o que pode ser observado em diversas simulações de fluidos através da Computação Gráfica, nas quais o método SPH é uma considerável referência durante o processo de abstração. Entretanto, é importante ressaltar que nestes tipos de simulações de fluidos a estrutura de simulação utilizada difere-se da necessária para a simulação dos Buracos Negros, o que atenua as necessidades de utilização de conceitos provenientes de outra ciência. Desta forma, espera-se contribuir para o crescimento da exploração gráfica de fenômenos espaciais assim como a interdisciplinaridade da Computação Gráfica com outras ciências, o que pode trazer grandes benefícios para a obtenção de avanços científicos.

1.3 Objetivos

A simulação de fenômenos da natureza é algo bastante explorado pela Computação Gráfica, e este tipo de aplicação tem proporcionado resultados de grande importância, tanto para a própria evolução desta área da Ciência da Computação como no auxílio a áreas provenientes de outras ciências. Seguindo esta linha de exploração, o presente trabalho tem como objetivo central a aplicação da Computação Gráfica para a simulação de um dos fenômenos da natureza que mais causa instigação no ser humano, os Buracos Negros, explorando técnicas de abstração e representação de comportamento de fenômenos naturais moldadas de acordo com o objeto problema em questão.

Inicialmente, o trabalho se propõe a levantar o conjunto de conhecimento dos dois principais métodos utilizados na concepção da simulação: o modelo de representação Sistemas de Partículas e o método de aproximação SPH. Em ambas apresentações foi adotada uma estratégia de divisão de conhecimento em duas partes, a primeira dedicando-se à apreciação do modelo em si, revelando sua estrutura e detalhes necessários para sua utilização e, após isso, a segunda parte, abordando o estado da arte da técnica através de uma sequência cronológica que vai desde a criação até os trabalhos mais recentes relacionados ao assunto.

Concebido o levantamento do conjunto de conhecimento referentes aos métodos Sistemas de Partículas e SPH, os quais, intrinsecamente, abordarão também a simulação gráfica de fenômenos naturais, o trabalho se concentrará na disposição do conhecimento referentes ao objeto problema do trabalho, os Buracos Negros, necessário para a compreensão do modelo de simulação proposto. Esta parte do trabalho terá como foco a apresentação dos principais conceitos da teoria de Buracos Negros, se propondo a uma exploração acessível, a fim de facilitar a leitura e entendimento do assunto, uma vez que o trabalho, sob uma visão global, dedica-se à área da Ciência da Computação. Neste sentido, o trabalho desenvolverá uma análise sobre o que são e como se comportam os Buracos Negros, revelando conceitos e determinados efeitos destes corpos, a fim de elucidar mecanismos necessários para a sua simulação gráfica.

Após a exposição dos conceitos relativos às técnicas aplicadas à representação e a descrição do objeto problema, será apresentado o sistema de simulação gráfica para Buracos Negros proposto. Nesta fase será desenvolvido um acompanhamento, passo a passo, da aplicação do SPH e do método Sistemas de Partículas, assim como alterações necessárias na estruturas destes, como é o caso da utilização de um modelo denominado de Sistemas de Partículas Virtuais, também proposto neste trabalho, e a modelagem do objeto problema para fins de simulação. A partir disso, serão exibidos os resultados obtidos, e feito um levantamento sobre as dificuldades encontradas e prováveis extensões para o trabalho.

1.4 Contribuição

Através deste proposta de simulação gráfica de Buracos Negros, a qual pode ser considerada como um caso de simulação fisicamente baseada inédito na Computação Gráfica, espera-se prover mecanismos que facilitem a inserção deste tipo de fenômeno astrofísicos em diferentes tipos de animações computacionais, permitindo a obtenção de resultados de diferentes tipos de simulação de Buracos Negros, variando em cores, tamanho e qualidade visual.

Além disso, o sistema proposto, por se tratar de uma simulação fisicamente baseada, facilitará o processo de criação de animações onde ocorrem interações de objetos com os Buracos Negros, permitindo, por exemplo, representar cenas em que naves intergalácticas navegam por regiões próximas a estes corpos celestes ou mesmo o comportamento de uma tripulação sendo sugada por eles. Tal contribuição, somada à própria concepção do sistema, influenciará a área de simulação de fenômenos astrofísicos através da Computação Gráfica a dar mais um passo em direção à sua futura consagração, aumentando assim suas fronteiras de exploração e simulação gráfica.

1.5 Organização da Dissertação

Esta seção apresentará a organização da dissertação, destacando conceitos que serão explorados em capítulos posteriores, a fim de orientar o leitor na absorção do conhecimento descrito no trabalho. De uma forma geral a dissertação será dividida em quatro partes, de acordo com assunto foco a ser trabalhado em cada uma destas. A escolha desta divisão visa não somente dispor a teoria necessária para a compreensão do modelo de simulação proposto de uma maneira visualmente concordante com os padrões estéticos, mas principalmente tornar o trabalho uma fonte acessível de conhecimento dentre os temas explorados em cada parte.

A primeira e a segunda parte da dissertação, denominadas sucessivamente de **Sistemas de Partículas** e **Smoothed Particle Hydrodynamics**, apresentarão os principais conceitos e explorações dos métodos que as intitulam, onde cada parte, como referenciado na seção anterior, será dividida em dois capítulos, no qual a primeiro explorará aspectos teóricos da técnica de modo a revelar a forma com que esta pode ser aplicada no modelo de simulação proposto e o seguinte apresentará uma série de aplicações do método, denotando as diversas formas em que este pode ser explorado.

A Parte III da dissertação, intitulada de **A Física dos Buracos Negros**, tem por objetivo situar o leitor do objeto problema a ser simulado, o que em outras palavras pode ser descrito como o fenômeno a ser representado, onde serão aplicados os conceitos de Computação Gráfica descritos nos capítulos anteriores. Nesta Parte, divida em três capítulos: **Corpos Negros**, **Buracos Negros** e **Radiação de Buracos Negros**, houve a preocupação de ambientar o leitor no universo de conhecimento dos Buracos Negros de um modo mais familiar, desenvolvendo uma leitura mais acessível, sem se focar em pontos complexos das teorias envolvidas, uma vez que o objetivo principal do trabalho, como um todo, é apresentar a aplicação da Computação Gráfica para simulação de um determinado fenômeno da natureza.

Finalmente, a última parte da dissertação se dedicará a apresentação da proposta de um sistema de simulação de Buracos Negros, baseado nos conceitos descritos em todos os capítulos anteriores. Nesta parte, denominada de **Uma Proposta de Simulação de Gráfica de Buracos Negros** serão apresentados detalhes referências à proposta de simulação, de modo a tornar possível a reprodução do trabalho. Além disso, também serão explorados aspectos técnicos, discutidas as dificuldades encontradas e apresentados os resultados obtidos, a fim de finalizar a dissertação em um capítulo conclusivo que fará uma análise sobre as contribuições alcançadas com o trabalho e possíveis formas de dar continuidade a este.

Capítulo 2

Sistemas de Partículas: A Caricatura Gráfica do Caos

Desde sua concepção, a Computação Gráfica sempre buscou a criação e aperfeiçoamento de técnicas que fossem capazes de representar da melhor forma possível o real ou imaginário. Entretanto, durante um notável período, mais precisamente entre a segunda metade da década de 1950 e o início da década de 1980, esta área da Ciência da Computação se limitou à utilização de métodos que eram capazes apenas de renderizar superfícies determinísticas, ou seja, objetos que possuem continuidade e constância em sua forma. Com isso, os resultados que eram observados, apesar de serem, na maioria das vezes, fieis aos objetos reais correspondentes, apresentavam certa artificialidade, fugindo ao realismo cobiçado.

Entretanto, esta fragilidade de representação da Computação Gráfica, neste período, não era o único problema apresentado pelas técnicas então existentes, outro desafio era a construção de primitivas gráficas que tornassem possível a definição de objetos virtuais complexos, com deformações e descontinuidade em suas superfícies como, por exemplo, superfícies montanhosas. Além disso, a concepção de animações utilizando a Computação Gráfica ligava as limitações existentes na modelagem estática a outros obstáculos.

Para solucionar tais problemas, os estudiosos da Computação Gráfica, impulsionados tanto pela necessidade científica natural de evolução quanto pelos anseios provindos da indústria cinematográfica e de jogos, iniciaram um amplo estudo de propriedades relativas aos objetos e cenas do mundo real passíveis de abstração no ambiente computacional. Utilizando, desta forma, conceitos de outras ciências como a Matemática e a Física, além de conhecimentos da própria Ciência da Computação, foi possível alcançar a concepção de importantes técnicas como *Motion Blur*, *Anti-aliasing* e Modelagem Estocástica, proporcionando tanto a solução de problemas existentes como a simulação de efeitos mais característicos. Apesar disso, a Computação Gráfica ainda não apresentava maturidade suficiente para simular efeitos dinâmicos complexos como, por exemplo, fogo, fumaça, nuvens, entre outros.

Embora alguns destes fenômenos já tivessem recebido propostas de representação, as soluções apresentadas ainda eram bastante complexas, utilizando na maioria das vezes métodos baseados em processamento de grandes bases de dados [Fournier et al. 1982]. Além disso, as aproximações existentes eram bastantes restritas a determinados objetos de simulação, ou seja, um

método capaz de representar um fenômeno não se adequava a outro semelhante. Este estado de limitação ao qual a Computação Gráfica se encontrava fez surgir a necessidade de elaboração de uma técnica capaz de proporcionar representações de fenômenos complexos de forma relativamente simples e satisfatória.

No início da década de 1980, durante um projeto de efeitos especiais para o longa metragem *A Ira de Khan* da série *Jornada nas Estrelas*, o cientista William T. Reeves recebeu o desafio de criar um efeito de simulação do que foi denominado de Efeito Gênesis, uma cena dotada de uma grande diversidade de detalhes altamente complexos. Analisando o problema, o cientista percebeu que a gama de conhecimentos proporcionados pela Computação Gráfica não seriam suficientes para criar tal representação. Reeves confrontou então tais conhecimentos com outras teorias e concebeu uma técnica audaciosa e robusta, a qual denominou de Sistemas de Partículas, capaz não somente de representar o seu problema inicial, como também incontáveis fenômenos dotados de dinamicidade e complexidade.

2.1 O Gênesis de *Jornada nas Estrelas*

O Gênesis é um conhecido livro da Bíblia Sagrada que descreve uma visão cristã da concepção do mundo e tudo que sobre ele há. Basicamente, o efeito fictício intencionado pelo filme *A Ira de Khan*, denominado de bomba Gênesis, é representar uma seqüência de ações semelhantes ao descrito pelo livro bíblico, porém limitando-se a um planeta. No Efeito Gênesis da série criada por Gene Roddenberry¹ a bomba citada inicia um processo de re-criação de um planeta, tal processo se efetua através de um explosão pontual de onde são emergidos uma série de anéis com aparência de paredes de fogo (Figura 2.1). Através disso, a superfície do planeta passa por um processo de formação de relevo, oceanos e vegetação [Paramount 1982].

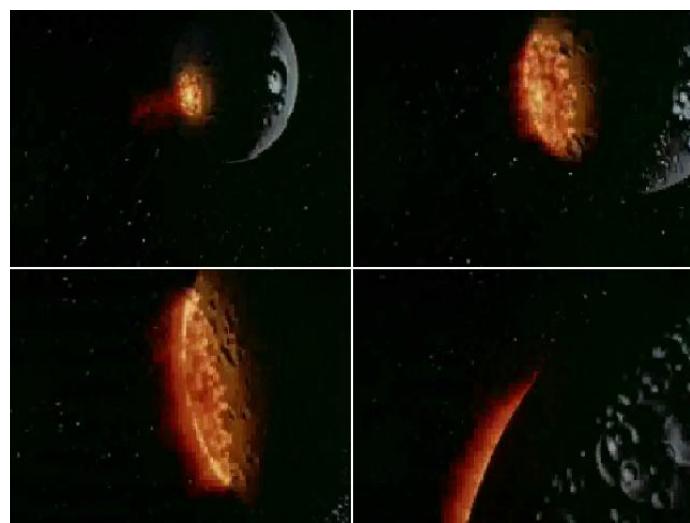


Figura 2.1: Seqüência de imagens da cena Efeito Gênesis do filme *A Ira de Khan*.

¹Gene Roddenberry é um conhecido escritor e produtor americano, responsável por grandes contribuições para o gênero ficção da indústria cinematográfica. Além disso, Roddenberry tornou-se bastante popular por ser o primeiro ser humano a ter suas cinzas lançadas ao espaço.

Embora este fenômeno pudesse ser representado por técnicas clássicas da Computação Gráfica, ou mesmo através da elaboração de uma animação não computadorizada, a grande necessidade de algo que demonstrasse um realismo impactante fez emergir a necessidade de buscar uma solução para o problema. Analisando-se o fenômeno do Efeito Gênesis é fácil perceber que uma de suas principais características é a imprevisibilidade das ações individuais, isto é, embora se possa conceber uma idéia das ações realizadas pelo fenômeno, sua caracterização de acordo com as premissas do mundo real se expande sobre uma visão caótica.

Prever a disposição do Efeito Gênesis como um todo, seus anéis e as próprias partículas de fogo individualmente seria algo altamente complexo, ou talvez inconcebível. A partir desta característica chave, o autor da teoria pôde buscar dentro do aparato de conhecimento disponível algo que se aproximasse mais de tal fato, a geração de processos estocásticos. Através disso, foi elaborada uma teoria baseada principalmente na premissa de se determinar atributos e ações de maneira relativamente imprevisível, ou seja, aleatória. Utilizando primitivas independentes entre si, as características estocásticas puderam ser definidas de modo a representar de forma bastante tênue fenômenos como o problema do Efeito Gênesis. Basicamente, a teoria criada, chamada de Sistemas de Partículas, pode ser definida como conjuntos de partículas que possuem a capacidade de representação de objetos dinâmicos complexos, também denominados de objetos *fuzzy* [Reeves 1983].

2.2 A Modelagem Através de Sistemas de Partículas

Da mesma forma que em outras técnicas de animação, a utilização de Sistemas de Partículas para representação de fenômenos dinâmicos utiliza a computação de uma seqüência definida de quadros, a qual segue a taxa padrão de animação, determinada pela indústria cinematográfica como vinte e quatro quadros por segundo. Porém, é importante observar que a modelagem através de Sistemas de Partículas exige que a cada quadro renderizado seja necessário efetuar uma série de cálculos a cerca das alterações dos atributos individuais de cada partícula.

Uma das principais vantagens da técnica Sistemas de Partículas é que esta se trata de um método de modelagem procedural, também conhecido como modelagem algorítmica. Basicamente, os métodos de modelagem classificados de tal forma correspondem às representações originadas por algoritmos descritivos [Gomes and Velho 2003], o que remete a uma clássica definição da Ciência da Computação sobre a representação de informação através de meios computacionais, que reza que objetos característicos do universo real podem ser representados computacionalmente através de um conjunto de modelos matemáticos. A partir disso, a geração de um quadro através da técnica proposta por Reeves permite que qualquer rotina de controle da aparência ou da dinâmica do sistema possa ser inclusa no algoritmo durante a geração de determinados quadros, permitindo a utilização de Sistemas de Partículas para diferentes fins.

Durante a geração individual dos quadros são realizados uma série de passos básicos para que o sistema de fato possua a aparência de movimento ao qual é destinado. O primeiro passo desenvolvido para a geração de um determinado quadro é a verificação da quantidade de partículas que permanecerão ativas no sistema. Durante esta fase, todas as partículas que ultrapassaram seu tempo de vida ou, determinados casos, o limiar de um de seus atributos serão extintas. Após isso, o sistema é capaz de reconhecer a quantidade de partículas que

deverão ser concebidas de acordo com o definido pelo método no instante solicitado. Definido isto, as novas partículas recebem valores estocásticos em seus atributos, o que lhes determinará as características de aparência e dinâmica durante todo o seu tempo de vida. Neste instante, as partículas ativas no sistema têm seus atributos modificados pelas regras de controle definidas, para que então possam ser renderizadas em um determinado quadro.

Além da técnica Sistemas de Partículas ser caracterizada pela modelagem de objetos *fuzzy* através da utilização de coleções de partículas definidas como primitivas gráficas, outra importante característica deste método da Computação Gráfica é a utilização de processos estocásticos para a determinação de valores globais e individuais do sistema [Azevedo and Conci 2003]. Entretanto, tais valores devem estar contidos em um conjunto finito, limitado por um valor máximo e um valor mínimo permitido. Normalmente, este limite é determinado utilizando-se um valor médio e uma variação máxima permitida [Reeves 1983].

2.2.1 Propriedades de Partículas

Durante a execução de um Sistema de Partículas, cada entidade do sistema possui características individuais, as quais são responsáveis por definir o seu comportamento e o comportamento do sistema como um todo. De acordo com a teoria postulada por Reeves, os atributos básicos necessários para a modelagem de um objeto através de um Sistema de Partículas são: posição inicial, velocidade, aceleração, tamanho, cor, transparência, forma e tempo de vida. Cada um destes atributos é individualmente modificado em suas sucessivas renderizações de acordo com outros parâmetros, controladores de aparência e dinâmica do sistema.

Uma das formas mais simples de se definir a posição inicial de uma partícula, quando esta se refere a um ponto em um espaço tri-dimensional, é utilizando conceitos trigonométricos associados a processos estocásticos. De acordo com a teoria proposta, a região de nascimento de uma partícula pode ser definida sob diferentes formas, denominadas de formas de geração. A partir da determinação de uma forma de geração e um controlador de nascimento baseado em regras trigonométricas, uma posição inicial aleatória é atribuída a cada partícula em seu momento de nascimento.

Os demais atributos básicos para a geração de um sistema de partículas podem ser definidos a partir de um processo estocástico associado a um limite inferior e superior. O atributo velocidade, por exemplo, possui seu valor definido como a soma de uma velocidade média, a qual se refere a um padrão para todo o sistema, e uma taxa de variação, como é mostrado na Equação 2.1.

Os demais atributos são obtidos analogamente, entretanto em alguns casos é necessário que análises adicionais sejam efetuadas. Na definição do Sistema de Partículas utilizado para a elaboração do Efeito Gênesis, por exemplo, o atributo cor possuiu uma alta taxa de variação para o canal vermelho, já os canais verde e azul limitaram-se a pequenos valores. Essa discrepância observada em relação às análises individuais de cada atributo de um partícula está ligada principalmente ao enfoque do sistema criado, ou seja, qual deverá ser o comportamento apresentado pelo Sistema de Partículas de acordo com seu objeto de representação.

$$Velocidade = VelocidadeMedia + Randomico() \cdot IntervaloDeVariacao \quad (2.1)$$

2.2.2 O Nascimento de Uma Partícula

Um dos principais estágios da execução de um Sistema de Partículas é o nascimento de uma partícula. É nesta fase, que todos os seus atributos são pré-definidos, determinando o comportamento individual de cada entidade do sistema. Entretanto, antes de se determinar a concepção de uma partícula, é necessário definir uma forma de geração a ser utilizada, que além de ser responsável pela definição da posição de nascimento de uma partícula, também está intimamente ligada à determinação da direção de propagação e, em determinados casos, pela variação de valores de outros atributos [Reeves 1983].

Existem diversos tipos de formas de geração de partículas, entre as quais podem-se destacar formas de geração esféricas, circulares e retangulares. Em uma forma de geração esférica, a cada partícula do sistema são associados dois valores angulares α e β , responsáveis pela determinação da posição inicial de uma partícula. Obtidos tais valores, são efetuados deslocamentos angulares sucessivos em relação ao plano cartesiano $\bar{x}\bar{y}$ e $\bar{x}\bar{z}$, proporcionando, desta forma, uma posição inicial aleatória e contida sobre a forma de geração definida (Figura 2.2). Com base nisso, a direção de propagação de cada partícula pode ser definida determinando-se um vetor entre a posição inicial e o centro da forma de geração esférica. Deste modo, é fácil observar que as partículas geradas neste tipo de sistema partiriam da origem para todas as direções [Azevedo and Conci 2003].

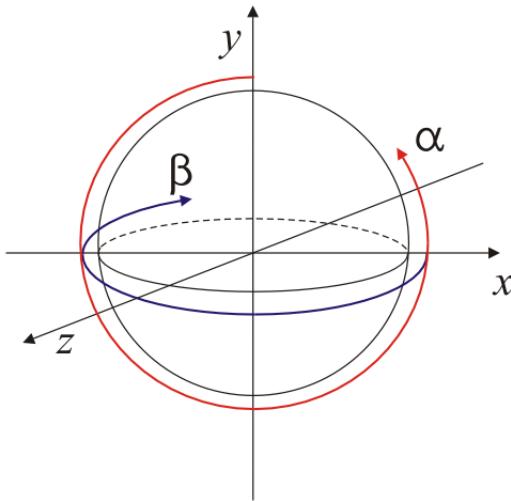


Figura 2.2: Forma de geração esférica.

Formas de geração do tipo circular e retangular são relativamente mais simples que as formas de geração esféricas, por não possuírem a necessidade de tratamento, no momento da determinação da posição inicial, tridimensional. Uma maneira de se utilizar uma forma de geração circular é definindo-se um valor angular aleatório γ e um valor de raio aleatório. Desta forma a posição inicial de cada partícula pode ser através de uma relação entre γ , o qual será utilizado para efetuar um deslocamento angular sobre um plano definido, e o valor de raio encontrado, o qual deverá possuir um limite máximo permitido (Figura 2.3).

Formas de geração do tipo retangular podem ser definidas através apenas da obtenção de deslocamentos lineares perpendiculares e aleatórios, os quais definirão pontos internos a

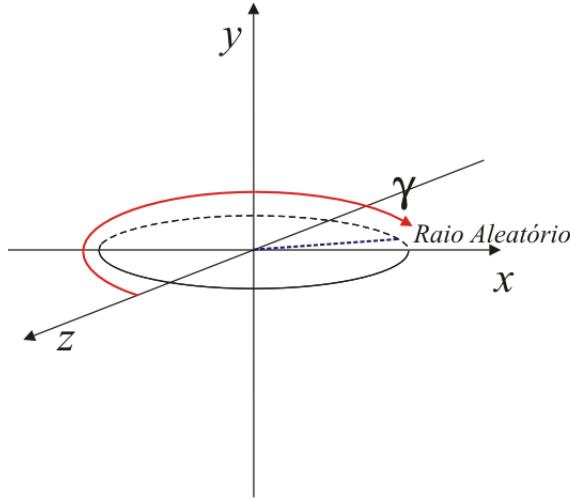


Figura 2.3: Forma de geração circular.

um retângulo de lado l e altura a definido. Tanto as formas de geração circulares quanto as retangulares normalmente possuem a direção de propagação das partículas definidas como forma de escape do plano ao qual a forma de geração está contida, podendo ser alterada de acordo com um atributo auxiliar denominado de ângulo de escape. Na Figura 2.4 é apresentado uma forma de geração retangular com ângulo de escape variável entre -30 e 30 graus.

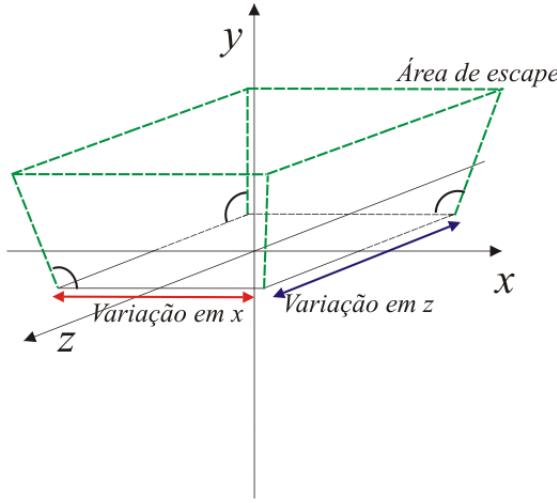


Figura 2.4: Forma de geração retangular com variação de escape.

Outra importante característica a ser considerada durante a fase de concepção de partículas é a quantidade de partículas a serem renderizadas pelo sistema. Existem, basicamente, duas maneiras de determinar este valor. A primeira forma é utilizar um número constante de partículas no sistema, determinado de acordo com as necessidades de representação do efeito desejado. Outra forma de se obter a quantidade de partículas é através da utilização de um valor de densidade permitido, o qual pode estar associado a diversos outros atributos como,

por exemplo, a distância do sistema ao observador ou a porção do sistema a ser renderizada em um determinado frame. A vantagem de se utilizar esta última forma é que o número de partículas renderizadas pode ser diminuído em determinados casos, poupano, deste modo, o processamento de partículas fora do campo de visão.

2.2.3 A Morte de Uma Partícula

Outro importante conceito utilizado na modelagem de objetos *fuzzy* utilizando Sistemas de Partículas é a extinção de partículas, processo conhecido como a morte de uma partícula [Reeves 1983], o qual de uma forma mais simples pode ser considerado como uma “reciclagem”. Durante o instante de sua concepção, a cada partícula é determinado um tempo de vida aleatório, definido de acordo com um valor médio e uma taxa de variação máxima. A partir disso, o tempo de vida de uma partícula, o qual é mensurado em quadros, é decrementado cada vez que tal partícula é renderizada em um quadro. Quando o valor do tempo de vida torna-se nulo, esta partícula torna-se extinta.

Além da extinção baseada no atributo tempo de vida, uma partícula pode também ser extinta por outros fatores, porém, neste caso, haverá necessidade de elaboração de rotinas adicionais de tratamento. Por exemplo, em determinados tipos de situações uma partícula poderá ser extinta do sistema caso possua um dos seus atributos como, por exemplo, cor ou transparência, ultrapassando um valor máximo definido. Além disso, um sistema mais complexo poderia verificar situações onde as partículas se localizam fora de uma região visível ao observador, sem possibilidade de retornarem ao espaço de observação.

Normalmente, a modelagem através de Sistemas de Partículas demanda uma carga de processamento relativamente alta, desta forma, o processo de extinção de uma partícula, seja através da simples verificação do tempo de vida ou mesmo utilizando regras de tratamento mais complexas, é utilizado como mecanismo de simplificação dos processos envolvidos no sistema como um todo.

Este procedimento ocorre da seguinte forma: quando uma partícula é extinta, esta não é efetivamente deletada da memória, mas sim passa por um processo de redefinição dos seus atributos, isto é, os valores de suas variáveis são novamente inicializados, gerando a impressão de tratar-se de uma nova entidade [Reeves 1983].

2.2.4 Dinâmica de um Sistema de Partículas

A dinâmica de um Sistema de Partículas é outro fator de grande importância em sua caracterização. Para que um Sistema de Partículas proporcione um efeito de movimentação, cada partícula tem seus atributos alterados de modo a apresentar um deslocamento espacial de acordo com o transcorrer do tempo [Reeves 1983]. Além disso, os demais atributos também são alterados a fim de gerar efeitos necessários à representação de determinados fenômenos. A Figura 2.5 apresenta uma simulação de chama onde atributos como transparência são modificados ao longo do tempo para gerar uma maior aproximação da realidade.

Habitualmente, a movimentação de partículas é determinada como a soma vetorial entre a posição da partícula e o atributo velocidade. Além disso, em alguns sistemas, utiliza-se também a aceleração associada ao movimento, de forma que efeitos mais complexos possam ser

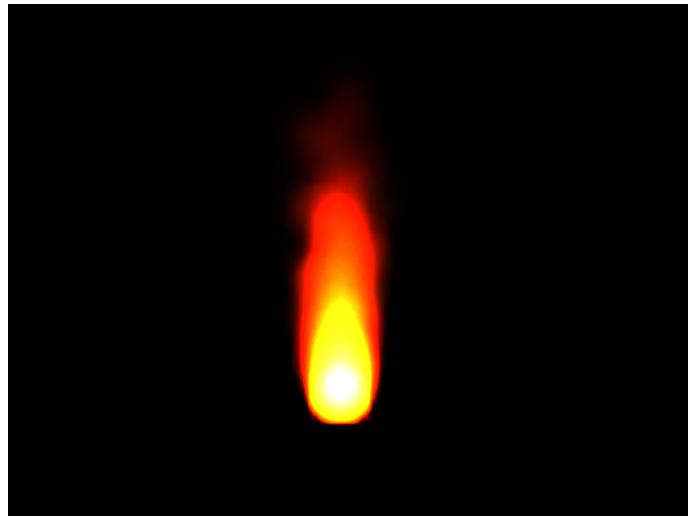


Figura 2.5: Representação de uma chama utilizando Sistemas de Partículas.

simulados. Entretanto, esta alteração de valores, tanto para velocidade quanto para os demais atributos, pode ser realizada através da implementação de regras da Física, ou até mesmo de outras ciências, de acordo com a necessidade de simulação do sistema modelado.

2.2.5 Hierarquização de um Sistema de Partículas

Em fenômenos onde é necessária a representação utilizando diversos Sistemas de Partículas, estes podem ser utilizados a partir da definição de uma hierarquia de entidades, ou seja, durante a execução de um Sistema de Partícula, definido como sistema “pai”, cada partícula criada trata-se na verdade de um novo Sistema de Partículas, dependente de seu sistema criador [Reeves 1983].

Com base nisto, a estrutura de representação que melhor se adéqua à hierarquia necessária são aquelas organizadas sob o tipo árvore, entretanto, é importante observar que esta estrutura é utilizada apenas para a definição de hierarquia, não afetando diretamente a imagem apresentada pelo sistema [Foley et al. 1990]. Desta forma, um efeito representado através da utilização de vários Sistemas de Partículas organizados hierarquicamente é dividido em vários níveis, onde cada nível inferior é influenciado pelas propriedades dos níveis superiores. Por exemplo, quando um determinado atributo de um Sistema de Partícula é alterado, todos os Sistemas de Partículas dependentes deste também têm o valor deste atributo alterado.

O Sistema de Partículas criado por Reeves para simulação do efeito Gênesis, por exemplo, utilizou dois níveis de hierarquia. No primeiro nível, um Sistema de Partículas pai, centrado na região de impacto da bomba, foi modelado para representar a geração de uma seqüência de Sistemas de Partículas filhos circunscritos em anéis de fogo a se expandir sobre a superfície do planeta. No segundo nível, cada Sistema de Partícula foi criado para simular explosões aleatórias, gerando, desta forma, um resultado mais realístico. Embora neste sistema as partículas pertencentes aos sistemas de segundo nível herdem os atributos do Sistema de Partículas de

primeiro nível, foram utilizadas variação estocásticas para impedir que Sistemas de Partículas filhos fossem idênticos [Reeves 1983].

Outro exemplo da utilização de estruturas hierárquicas para representação de fenômenos através de Sistemas de Partículas é a simulação de ciclos de vida estelares em uma galáxia, onde um Sistema de Partículas pai pode ter a função de gerar e controlar o nascimento de corpos galácticos, e sistemas filhos representar estágios da vida de uma estrela. Além deste e do efeito simulado por Reeves no filme *A Ira de Khan*, a hierarquização de Sistemas de Partículas pode ser uma ferramenta bastante útil para a representação de diversos outros fenômenos que apresentem uma complexidade ligeiramente maior que as representações simples através de Sistemas de Partículas.

2.3 Conclusão

Até o surgimento da técnica de modelagem Sistemas de Partículas, a representação de objetos *fuzzy* na Computação Gráfica era algo extremamente complexo. Embora já existissem métodos que proporcionavam aproximações de determinados fenômenos, estes ainda eram bastante limitados, e na maioria das vezes não proporcionavam resultados satisfatórios, o que denotava ainda mais a característica da Computação Gráfica como ferramenta de modelagem de objetos determinísticos.

Após a proposta de Reeves, o contexto de representação virtual através da Computação Gráfica sofreu uma notável (r)evolução em seu poder de abstração, tornando possível a criação de inimagináveis efeitos, além de também permitir a concepção de simulações científicas, de forma bastante fiel ao comportamento real dos objetos de estudo.

Este poder de abstração alavancou um rápido amadurecimento da técnica, tornando possível a sua utilização para simulação de fenômenos naturais, modelagem de superfícies, representação de comportamento de grupos, amostragem de objetos implícitos, além de diversos outros efeitos que possuem como uma das principais características a imprevisibilidade de ações. Além disso, com a evolução do conhecimento tecnológico, várias propostas de melhoramento no desempenho da técnica foram apresentadas, permitindo abstrações e representações ainda mais audaciosas, como pode ser observado em [Chen et al. 1999], [Ilmonen and Kontkanen 2003] e [Cai et al. 2008].

Outra importante contribuição proporcionada pela criação da técnica foi a expansão da utilização de conhecimentos de outras ciências como, por exemplo, da Física, durante a concepção de efeitos visuais. Através disso, os resultados obtidos pela técnica puderam ser ainda mais próximos às características do universo real, apresentando um surpreendente nível de abstração e tornando a técnica uma das melhores soluções da Computação Gráfica para a modelagem de objetos *fuzzy*.

Capítulo 3

Simulações Astrofísicas na Computação Gráfica

3.1 Introdução

A exploração da Computação Gráfica como ferramenta de simulação de fenômenos da natureza é algo bastante explorado, entretanto este tipo de aplicação, para o caso particular da simulação de fenômenos astrofísicos ainda apresenta uma quantidade de trabalhos relativamente baixa, quando comparadas a outras áreas. Tal afirmação apresenta um caso bastante específico da relação entre a Computação Gráfica e a Astrofísica, demandando uma especial atenção em sua compreensão, principalmente pelo fato destas ciências apresentarem um longo histórico de relacionamento. Esta relação entre a Computação Gráfica e a Astrofísica é datada quase que da mesma época do surgimento desta área da Ciência da Computação, quando então se observou uma aceleração na exploração espacial, porém, é importante destacar que a Computação Gráfica tem servido, principalmente, como ferramenta no auxílio a síntese de imagens obtidas através de satélites e como mecanismo em expedições espaciais não tripuladas.

Além disso, outro ponto em que estas duas ciências apresentam uma tênue ligação é na indústria de entretenimento, onde a Computação Gráfica é utilizada como ferramenta para uma série de concepções de cenas e efeitos especiais referentes à fenômenos astrofísicos, tanto em filmes e animações, quanto na produção de jogos. Porém, tais tipos de representações não apresentam uma ligação direta com os conceitos físicos destes fenômenos, não podendo, desta forma, serem consagradas como simulações fisicamente baseadas.

Neste capítulo serão apresentadas as duas contribuições apresentadas pela Computação Gráfica para a concepção de simulações de fenômenos astrofísicos baseadas na utilização de conceitos físicos, a fim de ilustrar a importância deste tipo de aplicação na Computação Gráfica. Os trabalhos descritos apresentarão uma proposta de simulação para os Anéis de Saturno e um modelo de simulação da Aurora Boreal.

3.2 Simulação dos Anéis de Saturno

O primeiro trabalho apresentado na Computação Gráfica para tratar de uma simulação astrofísica foi proposto por James Blinn [Blinn 1982], onde foi elaborada uma proposta de simulação de nuvens e superfícies de poeira, através da exploração de funções de reflexão de luz. Em seu trabalho, Blinn apresenta uma proposta de aperfeiçoamento de modelos de representação da interação entre luz e objetos, o que permite um aumento na eficiência do cálculo de níveis de intensidades nos resultados obtidos por simulações, orientado para objetos representados através de partículas.

O principal ponto motivador da elaboração desta proposta foi a necessidade de simulação de um caso específico de um fenômeno astrofísico, os Anéis de Saturno, os quais apresentam uma estrutura semelhante ao descrito por uma nuvem de poeira. Basicamente, estes anéis consistem de uma nuvem de partículas de gelo que desenvolvem um movimento orbital em torno de Saturno, tais partículas apresentam particularidades de acordo com a distância em relação ao planeta, apresentando variações em relação ao tamanho, capacidade de reflexão da luz, entre outras.

Embora, na época de elaboração da proposta o problema fosse considerado de grande complexidade, a geometria utilizada para a descrição das nuvens de partículas é relativamente simples, principalmente pelo fato de apresentar diversas propriedades restritas como, por exemplo, a quantidade de partículas por unidade de volume é constante em todo objeto simulado e as partículas que o representam possuem propriedades equivalentes entre si. Através disso, a proposta trabalha fatores como a reflexão apresentada pelas partículas de poeira que compõe o objeto e a transparência apresentada por este.

Nesta proposta de simulação, é utilizada uma estratégia para tratamento da reflexão da luz apresentada em cada partícula comparável ao que é observado com as fases da Lua, ou seja, é descrita uma função fase para cada partícula, a qual define o comportamento da reflexão da luz. Por exemplo, quando o ângulo de incidência da luz for igual a normal da superfície da partícula, logo esta apresentará reflexão máxima, comportando-se de forma semelhante ao visto com a Lua cheia. Além disso, uma outra importante propriedade do método, é que cada partícula é individualmente invisível ao observador, desta forma, os resultados são tratados por unidades de área, levando-se em conta a influência da reflexão de cada partícula. Tal ação torna também necessário o tratamento do bloqueio de luz ocasionado pelo conjunto de partículas, o que consequentemente demanda a aplicação de uma técnica de sombreamento.

As funções fase utilizadas no método são baseadas principalmente em dois conceitos físicos: a Lei de Lambert, uma lei, baseada em verificações empíricas, que descreve a absorção da luz por determinadas tipos de materiais, e nos conceitos descritos pelo trabalho de Henyey e Greenstein [Henyey and Greenstein 1941], o qual descreve a reflexão difusa presente em uma galáxia. Através disso, foi aplicado o método para a simulação dos Anéis de Saturno, um fenômeno astrofísico de grande interesse científico. A Figura 3.1 apresenta resultados desta simulação, os resultados foram utilizados em cenas da série Cosmos [KCET and Carl Sagan 1980]. O método também foi aplicado para a simulação de atmosfera planetária, o qual pode ser destacado como outro importante fenômeno astrofísico.

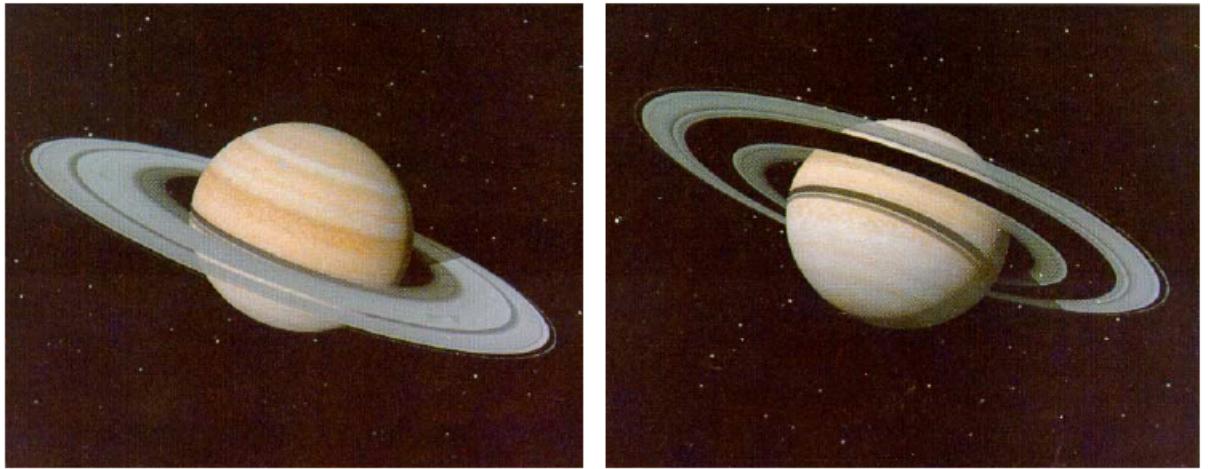


Figura 3.1: Simulação dos Anéis de Saturno [Blinn 1982].

3.3 Simulação da Aurora Boreal

Um outro importante trabalho relacionado à área de simulação de fenômenos astrofísicos através da Computação Gráfica foi apresentado por Baranoski *et al.* [Baranoski et al. 2000], onde foi descrito um algoritmo de simulação da Aurora Boreal, um dos mais belos fenômenos astrofísicos observados na Terra. De uma forma geral, a Aurora Boreal pode ser descrita como um fenômeno causado pela penetração de elétrons de alta energia, provenientes de ventos solares, os quais atingem a atmosfera terrestre como ondas de choque, provocando este efeito óptico nas regiões dos pólos magnéticos, o qual apresenta uma variação espectral de acordo com as propriedades das moléculas presentes na atmosfera. É importante observar que este fenômeno não é específico do planeta Terra, ocorrendo também em outros corpos celestes e, além disso, pode ser simulado fisicamente em laboratórios.

Em sua proposta, [Baranoski et al. 2000] desenvolvem um modelo que simula o processo de penetração dos elétrons provenientes de ventos solares na atmosfera, levando-se em conta sua distribuição espacial e temporal para, deste modo, tornar possível a renderização dos resultados obtidos. O modelo descrito apresenta uma descrição detalhada dos preceitos físicos que envolvem este processo, levando-se em conta aspectos como, por exemplo, a emissão de luz, a estrutura e morfologia da aurora Boreal e possíveis variações temporais.

Esta proposta de modelagem da Aurora Boreal é baseada principalmente em duas técnicas da Computação Gráfica: o modelo de representação Sistemas de Partículas [Reeves 1983], discutido no Capítulo 2 e a técnica de iluminação Ray Tracing [Whitted 1980]. Através disso, o trabalho apresenta uma descrição do processo de abstração e representação de importantes características deste fenômeno, como a variação espectral, a distribuição vertical de intensidade, entre outros. Tal processo é baseado em equações físicas que fornecem o cálculo de determinadas variáveis do sistema. Além disso, o modelo apresenta uma proposta de conversão do espectro de luz referente a aurora simulada para o modelo gráfico RGB. A Figura 3.2 apresenta resultados da comparação de uma imagem real (lado esquerdo) com uma imagem gerada pelo algoritmo proposto, apresentando uma considerável proximidade e qualidade visual.



Figura 3.2: Comparação entre uma imagem real da Aurora Boreal e o resultado obtido por [Baranowski et al. 2000].

3.4 Conclusão

Os trabalhos apresentados de [Blinn 1982] e [Baranowski et al. 2000] apresentam dois importantes exemplos da aplicação da Computação Gráfica para a simulação de fenômenos astrofísicos, onde ambos demonstram a importância da utilização de propriedades fisicamente baseadas para a concepção das simulações, o que em determinados casos pode tornar-se relativamente complexo, porém a relação entre complexidade e resultabilidade favorece tal tipo de aplicação. Apesar disso, a quantidade de trabalhos nesta área específica da Computação Gráfica ainda é bastante restrita, tornando-a aberta para exploração sob diferentes tipos de estratégias.

O Método de Aproximação

Smoothed Particle Hydrodynamics

4.1 Introdução

A representação de fenômenos caracterizados por um comportamento definido por consecutivas ações de um conjunto de entidades dependentes entre si, ou seja, um conjunto onde cada indivíduo influencia o comportamento de seus vizinhos e possui seu comportamento influenciado por ações vizinhas, é algo que demanda a aplicação de cálculos extremamente complexos, uma vez que a descrição do comportamento geral de um fenômeno deste tipo deve levar em conta o tratamento de cada ação individual. Tal dificuldade fez emergir a necessidade de criação de métodos numéricos de aproximação que diminuíssem a complexidade de descrição destes fenômenos, principalmente no que diz respeito a utilização de métodos computacionais para representação destes.

Entre os métodos propostos, um dos que obteve maior aceitação e utilização foi o método denominado de *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH). Através deste método foi possível obter-se uma simples forma de discretização de modelos formais complexos referentes a determinados tipos de fenômenos como, por exemplo, fluidos, permitindo uma análise simples, porém eficaz, do comportamento entre as diversas entidades compostoras do sistema. Além disso, o método apresenta a vantagem de ser flexível a ponto de se adequar a diferentes modelos de representação, tornando possível a sua aplicação em diversas áreas de conhecimento como a computação, a engenharia, a física, entre outras.

Neste capítulo, serão apresentados os principais conceitos referentes ao modelo de aproximação SPH, detalhando as primícias da concepção deste método, assim como uma descrição comparativa com outros métodos de simulação. A partir deste levantamento teórico inicial, será então apresentado o conjunto de equações descritas pelo método SPH e sua forma de aplicação como modelo de aproximação, assim como formalismos matemáticos utilizados em aplicações do SPH.

4.2 As principais características do método SPH

Basicamente, o método SPH foi desenvolvido para se comportar como um método de obtenção de aproximações numéricas para soluções de problemas astrofísicos. Desenvolvido em 1977 por Gingold e Monaghan [Gingold and Monaghan 1977] e independentemente por Lucy [Lucy 1977], o método considera que todo objeto pode ser descrito através de um conjunto de partículas, as quais contém individualmente características que permitem a definição das propriedades do objeto, utilizando conceitos de interpolação. Além disso, esta visão também permite a exploração do objeto como sendo um sistema de partículas típico, descrito pela literatura da física, o que torna o modelo adequado para a aplicação de uma série de conceitos descritos por esta ciência.

De modo geral, o método SPH funciona através da utilização de um núcleo de suavização, técnica esta prevista inicialmente por trabalhos matemáticos desenvolvidos na área de estatística, a fim de obter-se valores de probabilidade de densidade com base em um conjunto de valores amostrais [Rosenblatt 1956; Parzen 1962]. Este núcleo de suavização, quando aplicado para fins de interpolação, resulta na obtenção de uma função que estima valores para um ponto qualquer do objeto. Embora se acreditasse inicialmente que o modelo SPH apresentaria erros numéricos semelhantes ao métodos puramente baseados em probabilidade, Gingold e Monaghan, posteriormente ao desenvolvimento do método, comprovaram que a estratégia adotada pelo SPH permite que os resultados obtidos apresentem erros relativamente menores [Monaghan 2005].

Essa estratégia de aproximação numérica utilizando partículas faz com que o método SPH apresente diversas vantagens em relação a outros métodos de aproximação existentes. Entre estes benefícios, um dos pontos primordiais é a eficiente aproximação entre o contínuo e o discreto que o método permite alcançar, uma vez que, embora um objeto em questão seja descrito através de um conjunto de partículas, utilizando conceitos de interpolação pode-se obter toda a caracterização deste objeto, com uma quantidade de erros mínima, o que é um fator extremamente interessante para diversos tipos de aplicações, inclusive em simulações gráficas, as quais utilizam o mesmo conjunto de partículas utilizado pelo SPH para a descrição visual do objeto [Müller et al. 2003a].

Outra vantagem apresentada pelo método, também referente à disposição obtida pela utilização de partículas, é a grande semelhança que o método apresenta com problemas de dinâmica molecular, o que permite a fácil aplicação de conceitos físicos referentes a estes fenômenos [Hoover et al. 2004]. Além disso, esta disposição estrutural apresentada pelo método torna possível o relacionamento das soluções obtidas com posição e tempo, o que faz com que o método seja uma alternativa bastante interessante para representação de problemas geográficos e astrofísicos, as quais foram os incentivadores para o desenvolvimento do SPH.

Além das vantagens obtidas pelo método em relação a sua utilização como aproximação numérica e também sua eficiente utilização em fins de representação gráfica, a estrutura apresentada pelo SPH permite consideráveis ganhos computacionais, tanto em armazenamento quanto em complexidade de processamento. Diferente de outros métodos que demandam a utilização de grandes estruturas de dados e necessidade de cálculos complexos, o SPH permite a utilização de estruturas mais simples e compactas, que apesar disso ainda garantem a manutenibilidade

das informações dos objetos a serem tratados, e as soluções apresentadas pelo método requerem processamentos menos complexos para determinados tipos de situações.

Comparando-se o SPH com outros métodos como, por exemplo, o método das Diferenças Finitas [Anderson 1995], o SPH apresenta algumas notáveis vantagens de utilização. Ao utilizar o método de Diferenças Finitas e outros semelhantes, observa-se uma grande dificuldade no tratamento simultâneo de diversas características, principalmente no que diz respeito a comunicação entre tais características, o que não ocorre com o SPH, uma vez que a estratégia de utilizar partículas permite a exploração destas características de maneira bastante simples, visto que cada partícula é capaz de carregar as características do objeto em sua posição determinada. Outro fator observado é a dificuldade apresentada no tratamento de problemas que possuem valores extremamente extensos, o que pode ocasionar erros numéricos, fato este que não é observado com o SPH. Finalmente, o SPH permite o cálculo direto da advecção, ou seja, o transporte da variação de uma determinada característica é feito analisando-se diretamente o comportamento de vizinhança como, por exemplo, se a cor de determinada partícula é alterada, o transporte de cor é diretamente calculado nas partículas vizinhas, de acordo com as especificações definidas pelo método.

Além das vantagens apresentadas, o SPH permite uma simples combinação com outros métodos específicos para o tratamento de colisão, tornando-se uma boa opção de representação em sistemas que apresentam este tipo de evento, principalmente por garantir uma dissipação eficaz de energia ao longo do sistema [Monaghan 1997].

O método SPH, originalmente, foi desenvolvido para especificamente solucionar problemas restritos a uma classe de fenômenos astrofísicos, os quais não apresentavam necessidade de compreender em sua representação regras referentes a conservação de momento linear e angular [Gingold and Monaghan 1977; Lucy 1977]. Entretanto, por mostrar-se uma opção de solução bastante eficiente para os problemas tratados e também por apresentar indicativos de adequação a aproximações de sistemas fluidos, o método foi aperfeiçoado utilizando conceitos Lagrangeanos para descrição de fluidos compressíveis não-dissipativos, de modo a dispor mecanismos para tratar a conservação de momento linear e angular. Desta forma, o SPH tornou-se flexível o bastante para representar fluidos como sistemas de partículas mecânicos ou hidrodinâmicos [Gingold and Monaghan 1978].

Apesar disso, em determinados casos, o SPH apresenta uma baixa acurácia na obtenção de soluções de aproximação, o que levou, ao longo do processo evolutivo do conhecimento, a uma busca por solução alternativas e aperfeiçoamentos específicos para o método. Um exemplo foi a proposta denominada *Moving Least Squares* [Dilts 1999; Gois et al. 2008], a qual apresentava um conjunto de regras de tratamento que permite, para o conjunto de partículas que descreve o sistema representado em questão, a obtenção de uma interpolação linear perfeita. Entretanto, tal técnica apresenta várias desvantagens em relação ao modelo clássico do SPH, principalmente no que refere-se a perda no conjunto de informações que pode ser trabalhado, ou seja, propriedades como a conservação são ignoradas pelo método, e além disso, ocorre uma diminuição considerável na velocidade de processamento. Neste sentido, análises desenvolvidas sobre o método SPH, mostram que este se apresenta mais interessante para aplicação na classe de problemas que obedecem os requisitos apresentados anteriormente [Cleary and Monaghan 1999].

4.3 Núcleo de Suavização e Interpolação

O SPH, como referenciado anteriormente, trabalha através da representação de um determinado fenômeno através da utilização de um conjunto de partículas, onde cada partícula possui propriedades individuais que descrevem tal fenômeno. Baseado neste conjunto de partículas, as operações necessárias para descrever o comportamento deste fenômeno são realizadas empregando-se conceitos de interpolação. Durante este processo é necessário se conhecer a região de influência de cada partícula, denominada de núcleo de suavização, para que então possa-se obter a solução numérica adequada para o sistema descrito. Um exemplo prático da aplicação dos conceitos de núcleo de suavização podem ser observados na Figura 4.1. Nesta imagem observa-se que uma determinada partícula em questão, denotada pela cor vermelha, apresenta uma região de influência sobre as demais partículas, as quais, então, serão influenciadas pelas propriedades e ações verificadas na partícula em vermelho.

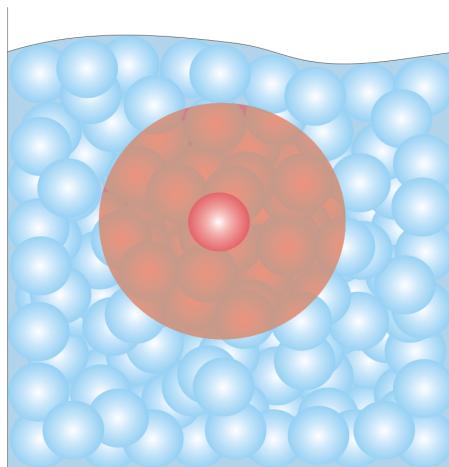


Figura 4.1: Exemplo da ação de um núcleo de suavização.

A determinação da região relativa ao núcleo de suavização é feita a partir da definição de uma função de suavização $W(x_{ij}, h)$, onde $x_{ij} = x_i - x_j$ tal que x_i é a posição da partícula i analisada, e x_j a posição de uma partícula vizinha j qualquer, sendo h definido como o comprimento de suavização da função. A função W pode variar de diversas formas e utilizar diferentes estratégias de definição, entretanto é importante observar que esta deve obedecer a uma série de requisitos básicos, os quais são provenientes da descrição do sistema a ser aproximado e do próprio método SPH. Um dos primeiros quesitos a serem analisados refere-se ao domínio da função de suavização, o qual deve possuir um suporte compacto, sendo comumente apresentado como no descrito pela Equação 4.1, onde k é um fator de escala de W , de modo que kh define o raio de influência de W , ou seja, caso a distância entre a partícula analisada i e a partícula j extrapole a região de abrangência da função, esta deverá retornar valor nulo, o que significa dizer que as propriedades referentes à partícula j não terão diretamente influência sobre a partícula i .

$$W(x_{ij}, h) = 0, \text{ se } |x_{ij}| > kh$$

$$W(x_{ij}, h) \geq 0, \text{ se } |x_{ij}| \leq kh \quad (4.1)$$

Além de possuir suporte compacto, a função de suavização também deve ser monotonicamente decrescente, ou seja, quanto mais próxima uma partícula vizinha j está da partícula i maior deverá ser a influência de j sobre i , o que pode ser representado pela Equação 4.2.

$$|x_{ij}| < |x_{im}| \Rightarrow W(x_{ij}, h) \geq W(x_{im}, h) \quad (4.2)$$

Outro fator de grande importância para a definição da função de suavização é que esta deve ser normalizada, obedecendo ao disposto pela Equação 4.3, e também deve “suficientemente suave”, o que garante uma melhor aproximação dos resultados obtidos pelo método SPH.

$$\int_{\Omega} W(x_{ij}, h) dx_j = 1 \quad (4.3)$$

Finalmente, é importante observar que a função de suavização W deve ser par, uma vez que a influência de uma partícula vizinha qualquer deve ser a mesma para casos em que o módulo da distância é igual, de acordo com a seguinte equação:

$$|x_{ij}| = |x_{im}| \Rightarrow W(x_{ij}, h) = W(x_{im}, h) \quad (4.4)$$

A partir destes quesitos básicos, pode-se então definir uma função de suavização para utilização do método de aproximação SPH. Um exemplo de função de suavização é apresentado em [Gingold and Monaghan 1977], onde foi proposta uma função de suavização Gausiana para problemas com uma dimensão. Entretanto, a maioria dos exemplos utilizados ao longo do histórico de aplicação do SPH como forma de aproximação de diversos problemas explora conceitos baseados em splines M_n [Schoenberg 1946]. Exemplos desta aplicação podem ser observados em [Foster and Metaxas 1996] e [Liu and Liu 2003].

Após a definição da função de suavização que deverá ser utilizada no processo de aproximação através do SPH, é necessário se conhecer a estratégia de interpolação a ser utilizada. Basicamente, a interpolação é um processo em que a partir de um conjunto de valores amostrais, uma função interpolante pode encontrar o valor em um determinado ponto, antes desconhecido. O método SPH, para aproximar o valor de uma determinada característica A em um ponto definido, parte da relação de identidade apresentada pela equação abaixo, onde $\delta(x)$ é o delta de Kronecker.

$$A_i = \int_{\Omega} A_j \delta(x_{ij}) dx_j \quad (4.5)$$

É importante observar que a utilização do delta de Kronecker, descrito pela relação apresentada a seguir, na Equação 4.5, permite que esta representação integral seja exata ou rigorosa [Liu and Liu 2003]. A função delta de Kronecker é dada pela seguinte representação:

$$\delta_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & x \in \left[\frac{-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right] \\ 0, & x \in \left] \frac{-\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} \right[\end{cases}$$

A ocorrência da função delta de Dirac na Equação 4.5 é então substituída pela função de suavização $W(x_{ij}, h)$, o que implicará que a nova relação obtida, representada pela Equação 4.6, seja uma aproximação. Esta relação pode ser considerada como uma função de densidade de probabilidade.

$$A_i = \int_{\Omega} A(x_j) W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.6)$$

Como o método SPH trata-se de um modelo de aproximação Lagrangeano, a forma de representação integral para o cálculo de um determinado atributo A , apresentado na Equação 4.6, pode ser discretizada através de um somatório incidente sobre todas as partículas que representam o objeto, sendo então apresentado como segue na Equação 4.7. Além disso, é importante observar que o elemento de volume infinitesimal dx_j da Equação 4.6 será então descrito, na forma discretizada da equação, como o volume ΔV_j da partícula j , o qual é cálculo com base nas propriedades físicas de tal partícula, seguindo os preceitos ditados pela física, ou seja, $\Delta V_j = m_j / \rho_j$.

$$A_i = \sum_j A_j W(x_{ij}, h) \Delta V_j \quad (4.7)$$

Neste sentido, para empregar-se o processo de interpolação, um fluido, representado pelo SPH como um conjunto de partículas, deve possuir, para cada uma destas partículas massa m , densidade ρ e posição x . Partindo-se da Equação 4.7 e efetuando-se a seqüência de passos descritos a seguir, obtém-se a equação geral de interpolação SPH (4.8).

$$A_i = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} W(x_{ij}, h) \quad (4.8)$$

A partir disso, pode-se finalmente aplicar o método SPH para a aproximação de equações de dinâmica de fluido, entretanto é importante notar que durante sua aplicação torna-se necessária a utilização de determinados formalismos matemáticos, principalmente em relação à aproximação do método SPH para derivadas espaciais, o que será descrito com maiores detalhes na próxima seção.

4.4 Aplicação do SPH para Derivadas Espaciais

Quando se utiliza métodos de aproximação para a representação de fenômenos físicos, estes apresentam a necessidade de emprego de determinados formalismos matemáticos, principalmente no que diz respeito a aplicação de derivadas. Neste sentido, torna-se necessário conhecer as formas derivadas primeira e segunda da equação de aproximação do SPH. Os procedimentos seguintes apresentarão a seqüência de passos utilizada para obtenção de tais derivadas.

Tomando como referência a Equação 4.6 e substituindo-se A por ∇A obtém-se que:

$$\nabla_{x_i} A_i = \int_{\Omega} \nabla_{x_j} A_j W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.9)$$

Integrando por partes o lado direito da Equação 4.9 tem-se que:

$$\nabla_{x_i} A_i = \int_{\Omega} \nabla_{x_j} [A_j W(x_{ij}, h)] dx_j - \int_{\Omega} A_j \nabla_{x_j} W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.10)$$

A partir disso, pode-se usar o teorema da divergência de Gauss [Leithold 1986] para representar a primeira integral do lado direito da Equação 4.10, de modo que esta torne-se uma integral de superfície, o que implicará que a equação passe a possuir a forma apresentada na Equação 4.11, onde S é a superfície de bordo do domínio integração.

$$\nabla_{x_i} A_i = \int_S A_j W(x_{ij}, h) \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} A_j \nabla_{x_j} W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.11)$$

Conhecendo as restrições impostas para a definição da função de suavização, sabe-se que o domínio de W está contido no domínio global do sistema aproximado, deste modo, por definição, tem-se então que a primeira parcela do lado direito da Equação 4.11 é nula, logo, esta equação é reduzida à seguinte forma:

$$\nabla_{x_i} A_i = - \int_{\Omega} A_j \nabla_{x_j} W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.12)$$

Além disso, de acordo com a definição de W , sabe-se que está função é simétrica, o que leva à validade da seguinte equação:

$$\nabla_{x_i} W(x_{ij}, h) = -\nabla_{x_j} W(x_{ij}, h) \quad (4.13)$$

Substituindo-se a Equação 4.13 na Equação 4.12, obtém-se finalmente a derivada primeira, ou seja, o gradiente da função de interpolação do SPH, a qual apresentará a seguinte forma:

$$\nabla_{x_i} A_i = \int_{\Omega} A_j \nabla_{x_i} W(x_{ij}, h) dx_j \quad (4.14)$$

Empregando-se os mesmos conceitos desenvolvidos para obtenção da Equação 4.8, a Equação 4.14 pode ser discretizada e passar a possuir a forma:

$$\nabla A_i = \sum_{j \in \Omega} A_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(x_{ij}, h) \quad (4.15)$$

Um processo semelhante ao descrito anteriormente pode ser utilizado para a obtenção da segunda derivada da equação de aproximação do SPH. Entretanto, como a proposta de simulação deste trabalho não explorará o uso desta segunda derivada, os passos de obtenção desta não serão apresentados aqui. Maiores detalhes sobre os formalismos necessários para isso podem ser obtidos em [Paiva 2007] e [Queiroz 2008].

4.5 Conclusão

O método SPH, desde sua criação, tem se mostrado como uma considerável estratégia de aproximação numérica para fenômenos físicos, devido ao conjunto de vantagens que possui, fato este que justifica sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento. Estas vantagens e características, discutidas ao longo deste capítulo, tornam este método uma opção de solução considerável para utilização em diversos problemas de simulações gráficas, o que será discutido amplamente no próximo capítulo. Entretanto, a escolha do SPH como ferramenta de aproximação também deve levar em conta as desvantagens que este método apresenta, entre as quais destaca-se a dificuldade no tratamento de partículas de borda, o que pode ser melhor resolvido através de outros métodos.

Detalhes práticos da aplicação do SPH para obtenção de valores, assim como a utilização correlata do conjunto de partículas utilizado pelo método como descrição do sistema a ser aproximado serão discutidos no Capítulo 7, onde será apresentada uma proposta de simulação gráfica de Buracos Negros baseada no método SPH e, neste modo, discutida empiricamente a eficiência da utilização deste.

Capítulo 5

Aplicações do método SPH

5.1 Introdução

O método de aproximação numérica SPH, desde sua criação, mostrou-se uma poderosa ferramenta para solução de uma série de problemas que tradicionalmente demandam cálculos freqüentemente complexos. Criado originalmente para ser aplicado em uma classe específica de fenômenos astrofísicos, o SPH apresentou resultados consideravelmente satisfatórios, tendo, inclusive, uma taxa de erro melhor do que a observada por métodos clássicos baseados em probabilidade e estatística.

O sucesso do emprego do SPH obtido em suas primeiras aplicações foi tamanho que o método foi aperfeiçoado de modo a tornar-se mais genérico e tratar outras questões antes não previstas como, por exemplo, a conservação de momento linear e angular. Neste sentido, o SPH ganhou robustez suficiente para tornar-se uma das melhores soluções de aproximação para diversos problemas complexos como, por exemplo, o tratamento de fenômenos que apresentam características de fluidos. Além disso, a estrutura utilizada pelo SPH para solução de problemas mostrou-se bastante adequada para a sua utilização em problemas de simulação gráfica, devido a relativa facilidade de representação de formas utilizando a base descrita pelas partículas usadas pelo SPH e também as vantagens computacionais oferecidas pelo método, o que tornou o método também uma alternativa de solução para problemas desta área da ciência da computação.

Neste capítulo, serão discutidos exemplos de aplicação do método SPH em diversos tipos de problemas, orientados, tanto para a soluções de simulação gráfica quanto para problemas astrofísicos, principalmente no que refere-se à fenômenos que envolvem Buracos Negros. Inicialmente será desenvolvido uma exploração a cerca dos problemas que estimularam a criação do SPH. Após esta visão inicial, o capítulo concentrará seu foco na descrição de problemas que utilizam o SPH como solução para fenômenos envolvendo Buracos Negros. Em seguido, serão discutidos fatores relacionados a aplicação do SPH para na simulação de mecânica dos sólidos, campo este que apresenta um notável crescimento científico. Finalmente, o capítulo se focará na apresentação de aplicações do SPH para problemas de simulação de fluidos, abrindo, neste momento, campo para discussão a cerca do método SPH como ferramenta de aproximação para as equações de Navier-Stokes, a fim de apresentar exemplos mais específicos de sua aplicação na Computação Gráfica.

5.2 SPH como ferramenta de simulação de fenômenos astrofísicos

Embora métodos clássicos de aproximação utilizados para o tratamento de fluidos como, por exemplo, diferenças finitas, sejam capazes de reproduzir satisfatoriamente casos em que observa-se sistemas que possuem fronteiras ligeiramente bem definidas, principalmente no que refere-se à solução de fluidos envolvidos em processos industriais, estes métodos não são plenamente capazes de serem aplicados a casos mais específicos como na dinâmica de sistemas astrofísicos.

Um caso comum na solução de problemas astrofísicos é o tratamento de nuvens de gás criadas através de relacionamentos de forças. Tais fenômenos apresentam peculiaridades que os distinguem de problemas de dinâmica de fluidos comumente discutidos. Uma destas características refere-se ao fato de que estes tipos de sistemas são circundados por vácuo, região esta que possui densidade zero de matéria e que quando tratadas por métodos como o das diferenças finitas proporcionam resultados relativamente pobres.

Um exemplo desta classe de problemas astrofísicos é o caso da simulação de mini estrelas [Monaghan and Price 2004]. Neste tipo de problema, de acordo com a proposta apresentada, as forças relacionados à gravidade são substituídas por forças atrativas simples. Este tipo de força utilizada baseia-se em preceitos ditados por Newton, os quais descrevem que duas partículas possuirão força atrativa entre si proporcional a distância em que se apresentam uma em relação a outra [Chandrasekhar 1995]. A partir disso, o modelo SPH é utilizado permitindo o cálculo das influências entre as diversas forças atuantes sobre uma partículas, provinda de todo o seu conjunto de vizinhança, através da aplicação do método sobre um pequeno número de equações diferenciais, o que permite a obtenção de resultados extremamente satisfatórios.

Outra aplicação do método SPH para problemas astrofísicos está na simulação de discos de acreção. Diversos exemplos deste tipo de utilização foram apresentados ao longo do histórico do SPH [Whitehurst 1989; Lubow 1992; Ichikawa et al. 1993], entretanto um dos trabalhos de maior divulgação foi o apresentado por Flegbe *et. al.*, onde foi apresentado uma proposta de aproximação de viscosidade baseada no modelo SPH e sua aplicação para a simulação de discos de acreção. Utilizando o modelo proposto, os autores realizaram diversos testes baseados em condições verificadas em fenômenos astrofísicos como, por exemplo, o escoamento de fluidos sob influência de forças gravitacionais, cálculo do comportamento de gases em órbita kepleriana, entre outros, e verificaram que os resultados obtidos relacionavam de maneira satisfatória com os verificados analiticamente [Flegbe et al. 1994].

Além destes testes, a proposta de Flegbe *et. al.* apresentou uma exploração mais detalhada a cerca da simulação de discos de acreção, os quais apresentam basicamente ações influenciadas por fatores relacionados à viscosidade. Na proposta, além de apresentar uma discussão a cerca de um modelo específico de viscosidade para tratamento deste tipo de problema, os autores descrevem um modelo de dissipação de energia, válido para fenômenos em que observa-se a formação de anéis em torno de centros de massas.

Seguindo a mesma área de aplicação do SPH, porém em outro ramo de exploração, recentemente, o modelo foi utilizado para aplicação de métodos de extração de superfícies orientados à visualização de fenômenos astrofísicos. Embora este ponto de exploração se distinga dos exemplos apresentados anteriormente, por ser focado na exploração de fatores visuais, ele apresenta

importantes conceitos sobre o uso do SPH na computação gráfica como, por exemplo, no que refere-se à uma melhor utilização das estruturas de partículas utilizadas pelo SPH, tanto no que refere-se a obtenção de simulações orientadas à análise de dados como simulações orientadas a visualização propriamente dita do fenômeno. Em [Rosenthal et al. 2007] é apresentado um estudo de caso a cerca da simulação de anãs brancas utilizando o SPH. Além disso também observa-se uma concentração em estudos de simulação de anãs brancas e objetos espaciais semelhantes em colapsos com Buracos Negros (Figura 5.1).

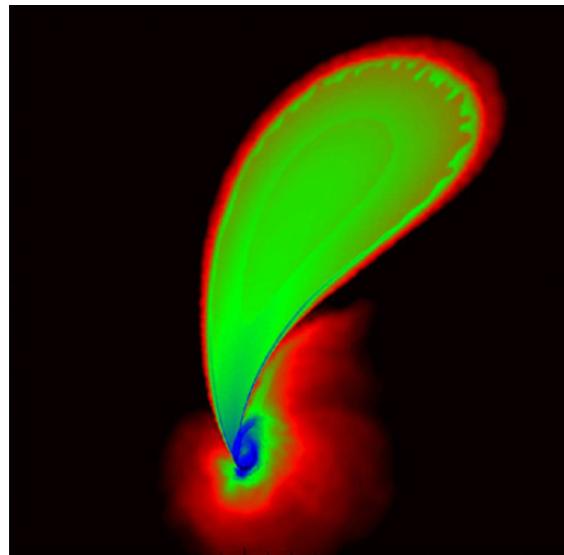


Figura 5.1: Simulação de anãs brancas em encontro com Buracos Negros. [Rosswog et al. 2008]

5.3 A Utilização do SPH para Representação de Buracos Negros

A aplicação do método SPH para fenômenos astrofísicos apresentou resultado consideravelmente interessantes, o que a tornou uma importante solução na simulação de fenômenos que envolvem Buracos Negros. Basicamente, um Buraco Negro é uma região do espaço-tempo que apresenta uma alta densidade de matéria a qual proporciona uma força de atração que torna a velocidade de escape destes corpos maior que a velocidade da luz (maiores detalhes sobre os Buracos Negros serão apresentados no Capítulo 6).

Um dos primeiros trabalhos propostos relacionados à aplicação do SPH para simulação de fenômenos que envolvem Buracos Negros refere-se a derivação das equações de SPH para fluidos relativísticos em geometrias de espaço-tempo curvas [Laguna et al. 1993]. Nesta proposta, apresentada em 1993, foi aplicada a técnica SPH para desenvolver um estudo a cerca do comportamento apresentado por fluidos em regiões próximas a Buracos Negros. A partir disso, foi desenvolvido um estudo de caso sobre o colapso de estrelas provocado por Buracos Negros supermassivos.

De acordo com o discutido neste trabalho, a proposta apresentada é válida quando o espaço-tempo é estático e a densidade de massa-energia do fluido é suficientemente pequena de modo que um modelo Newtoniano de fluido de gravidade uniforme torna-se impróprio. A escolha do método SPH para este tipo de aplicação deve-se, principalmente, a duas razões: o método não necessita da utilização de um grid para computar derivadas espaciais, evitando problemas de distorção e “confusão” (*tangling*) de malhas, e a natureza Lagrangeana do SPH se assemelha fortemente com o disposto por métodos de Diferenças Finitas.

Outra proposta apresentada no âmbito da solução numérica de problemas relacionados a Buracos Negros explora a representação de viscosidade física e a simulação de discos de acresção, através da utilização de uma força viscosa como um divergente de um tensor simétrico aproximada através da utilização do SPH [Flebbe et al. 1994]. O processo de simulação explorado no trabalho é bastante semelhante a outras propostas anteriores, tendo como principal diferencial a exploração da viscosidade.

Em 1999, os cientistas William Lee e Włodzimierz Klužniak apresentaram o primeiro de quatro trabalhos onde exploraram, de uma forma detalhada, a hidrodinâmica relacionada aos sistemas binários formados por Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros. No trabalho são apresentadas explorações referentes ao estágio final de “consumo” da energia-matéria de uma estrela de nêutrons por um Buraco Negro, além das consequências deste fenômeno, como, por exemplo, a possível formação de um disco de acresção em torno do Buraco Negro. Para fins de simplificação o trabalho considera apenas sistemas totalmente fechados, ou seja, onde é ignorada a influência de fatores externos. A Figura 5.2 apresenta alguns dos resultados da simulação numérica desenvolvida no trabalho de Lee e Klužniak.

No modelo proposto neste artigo, as partículas tiveram suas propriedades aproximadas via SPH, o qual foi aplicado utilizando a mesma estratégia de núcleo de suavização apresentada em [Monaghan and Lattanzio 1985], baseada no conceito de B-splines. Nesta proposta de simulação de eventos relacionados a Buracos Negros e estrelas de nêutrons a energia termal apresentada pelo sistema baseia-se nos preceitos ditados pela termodinâmica, tomando ainda a influência que a viscosidade descreve em tal. Além da utilização do SPH para as propriedades das partículas, a proposta de Lee e Klužniak ainda explora o uso deste método para aproximações referentes ao cálculo de ondas gravitacionais [Lee and Klužniak 1999], principalmente no que refere-se a luminosidade apresentada por estas. Maiores detalhes sobre este tipo de aplicação do SPH para simulação de fenômenos relacionados a Buracos Negros serão apresentados no Capítulo 7.

Seguindo esta mesma linha de exploração, em um trabalho proposto no mesmo período do apresentado por Lee e Klužniak, Lanzafame *et al.* exploraram a utilização do método SPH para a exploração da evolução de discos de acresção sobre o tempo. Através deste trabalho foi possível se prever que em grandes regiões influenciadas por fatores como energia e momento angular, quando se tem o valor da viscosidade menor que um valor crítico determinado, são observadas ondas de choque [Lanzafame *et al.* 1998].

Recentemente, [Kobayashi *et al.* 2004] apresentaram estudos a cerca de emissões de raios-X e ondas gravitacionais a partir do colapso de estrelas provocado por Buracos Negros. Os cálculos apresentados neste trabalho basearam-se em uma utilização do SPH previamente apresentada por [Laguna *et al.* 1993], propondo estratégias para diferentes tipos de Buracos Negros. A

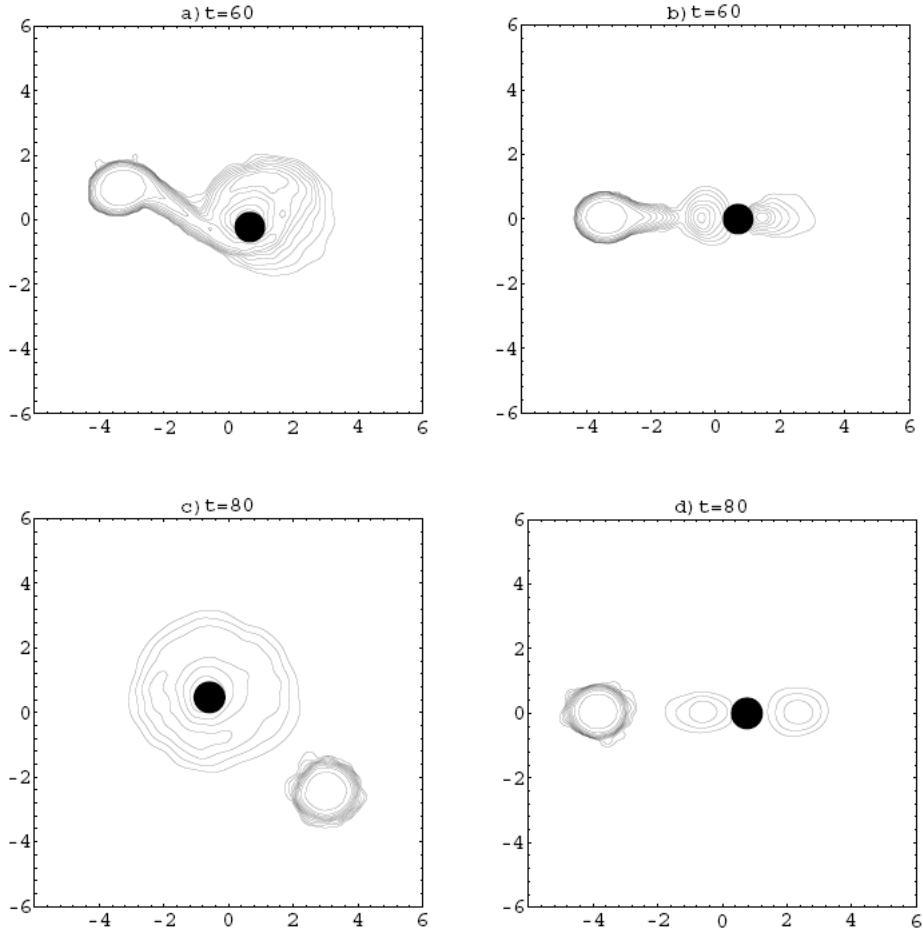


Figura 5.2: Resultados apresentados por [Lee and Klužniak 1999] do processo de colapso entre uma Estrela de Nêutrons e um Buraco Negro. As imagens do lado esquerdo mostram os contornos de densidade em um plano orbital, enquanto as imagens do lado direito apresentam resultados em um plano meridional.

partir disso o trabalho demonstrou formas de detecção de radiação gravitacional nestes tipos de sistemas, apresentando resultado relativamente satisfatórios para o problema.

Embora a exploração do método SPH para a solução de diversos fenômenos astrofísicos, inclusive aqueles referentes aos Buracos Negros, tenha alcançado uma considerável maturidade, este campo de pesquisa ainda possui muitas questões em aberto a serem estudadas e solucionadas. Além disso, a utilização do método por outras ciências como, por exemplo, na ciência da computação, através da computação gráfica, ainda se mostra bastante restrito a determinadas linhas de exploração, como é o caso da simulação de fenômenos fluidos, principalmente na simulação das equações de Navier-Stokes, como é mostrado nas seções seguintes, deixando em aberto ainda a aplicação sobre outras áreas, inclusive em relação à própria área inicial de exploração do SPH.

5.4 Utilização do SPH para mecânica dos sólidos

O SPH, em sua disposição estrutural, apresenta diversas vantagens que podem ser exploradas para o seu emprego em diferentes tipos de aplicações. Uma destas vantagens é o tratamento apresentado para sistemas que apresentam fraturas, ou seja, determinados tipos de regiões que apresentam descontinuidade por rompimentos bruscos, comportamento este bastante observado em sistemas sólidos, o que permitiu que o SPH se tornasse uma considerável opção de solução para problemas relacionados à estes tipos de sistemas.

Neste sentido, diversos modelos baseado na utilização do SPH foram propostos, principalmente, relacionados à solução de problemas de modelagem física, entre os quais destacam-se métodos que usam o SPH para a representação de pequenas fraturas e fragmentação de sólidos [Benz and Asphaug 1994; Benz and Asphaug 1995]. Além destes tipos de aplicação, outra utilização do SPH para simulações relacionados a sistemas sólidos é a representação de congelamento de líquidos. Em [Monaghan et al. 2005] é apresentado um modelo deste tipo de aplicação, onde são explorados tanto o congelamento de líquidos puros como a interação entre sistemas binários.

Neste modelo de simulação de congelamento, a estratégia explorada baseia-se na utilização de duas classes de partículas SPH, uma referente ao estado líquido e outra referente ao estado sólido. Inicialmente, as partículas da classe sólida não possuem massa, porém a medida que o sistema modela a passagem de um estado para outro, estas partículas sólidas começam a receber massa das partículas líquidas, o que é simulado através de processos de transferência de massa e calor, aproximados através do SPH.

De acordo com testes realizados, a utilização do SPH para a simulação da variação de temperatura e de passagem de um estado físico para outro é concordante com teorias prévias e experimentos reais [Müller et al. 2003a], o que comprova a eficácia do método para este tipo de aplicação. Entretanto, é importante observar que estes modelos referem-se à simulações particularmente voltadas para fins relacionados a física, sendo que a sua utilização para fins de representação gráfica torna necessária a aplicação de estratégias específicas, somadas às apresentadas pelas propostas de aproximação física, semelhante ao que é observado em simulações gráficas de fluidos.

Outro trabalho de considerável importância na área de mecânica de sólidos foi apresentado por [Paiva et al. 2006], onde foi explorado o método SPH como ferramenta de aproximação de simulações de derretimento de objetos viscoplásticos. Neste trabalho é explorado o processo de simulação de objetos que inicialmente possuem alta viscosidade e, de acordo com a evolução da simulação, vão se transformando em objetos de baixa viscosidade, alternando entre os estados sólido e líquido (Figura 5.3).

5.5 A simulação gráfica de fluidos utilizando SPH

A animação de fluidos é uma das áreas da computação gráfica que recebe maior atenção por partes das investigações científicas, devido a grande necessidade de criação de modelos de simulação que sejam fieis à realidade, tanto em comportamento quanto em sua reprodução visual. Diversas pesquisas se concentram na elaboração de modelos voltados para simulação de

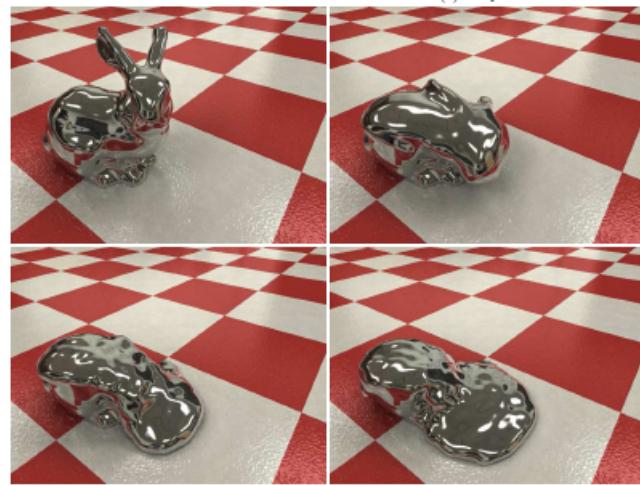


Figura 5.3: Simulação de derretimento de um objeto sólido usando SPH [Paiva et al. 2006].

fluidos, tanto voltadas para fins de análise das propriedades relacionadas a estes objetos quanto como meio de representação artística. Um exemplo da aplicação de métodos de animação de fluidos pode ser visto na terceira parte da trilogia de O Senhor dos Anéis, onde foram utilizados conceitos baseados no SPH para animação de um rio de lavas (Figura 5.4).



Figura 5.4: Exemplo de animação artística de fluido utilizando SPH. ©New Line Cinema.

Basicamente, o comportamento dos fluidos é regido por um conjunto de equações diferenciais parciais, conhecidas como equações de Navier-Stokes. Propostas ainda durante o século XIX, as equações de Navier-Stokes são responsáveis por descrever a conservação de momento de fluido. Além destas equações, ainda existem outras duas equações necessárias para a simulação deste tipo de fenômeno, são estas as equações referentes a conservação de massa e conservação de energia.

A utilização analítica das equações Navier-Stokes para representações computacionais é considerado algo extremamente complexo e ainda não solucionado, o que torna necessário a aplicação de métodos de aproximação numérica. Tais métodos dividem-se fundamentalmente em duas estratégias, uma baseada na utilização de malhas, denominada de abordagem Euleriana, na qual destaca-se a exploração dos métodos Diferenças Finitas [Chapra and Canale 1988]

e Elementos Finitos [Hirsch 1988], e outra baseada na utilização de partículas, descrita como Lagrangeana, que é o caso da aplicação do método SPH.

O histórico de utilização do SPH na computação gráfica mostra que inicialmente o método SPH era utilizado para aplicações voltadas para engenharia, porém o avanço de técnicas de visualização permitiu o emprego do SPH para fins de simulações voltadas para a obtenção de resultados visualmente fiéis, principalmente em relação a animação de fluidos. Desde então, diversas propostas voltadas a este intuito foram sendo apresentadas. Pioneiramente, o modelo SPH foi introduzido na computação para a representação de corpos altamente deformáveis [Desbrun and Cani 1996], entretanto a proposta que apresentou maior divulgação e que é considerada como modelo de referência para novas propostas, foi a apresentada por Müller *et al.*, onde foi descrito uma estratégia de simulação interativa de fluidos baseado no SPH (Figura 5.5).

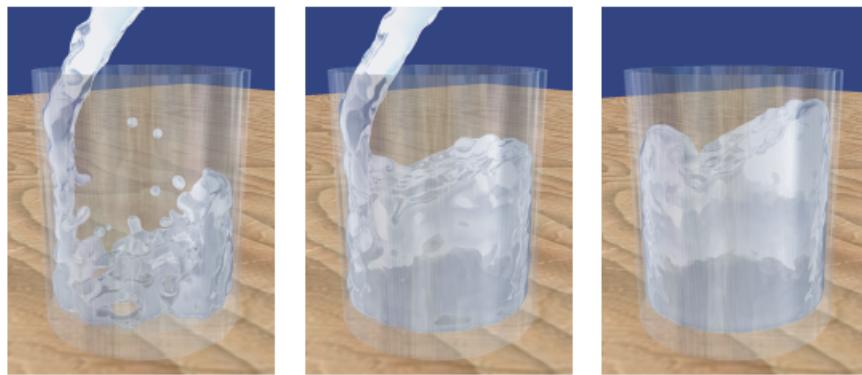


Figura 5.5: Simulação interativa de fluidos utilizando SPH [Müller *et al.* 2003a].

Classicamente, a utilização das Equações de Navier-Stokes pode ser considerada a melhor solução em modelagem de sistemas fluidos, entretanto a computação destas equações torna necessária a utilização de métodos de aproximação. Nos próximos parágrafos será descrito um modelo de aproximação baseado em SPH para solução computacional destas equações, baseado no conceitos descritos por [Müller *et al.* 2003a].

Uma das forma de representar as Equações de Navier-Stokes é descrito pelas Equações 5.1 e 5.2, que descrevem a conservação de massa e conservação de momento de um fluido, onde v é a velocidade, ρ é a densidade, p é a pressão, μ é a viscosidade e g refere-se a gravidade ou ainda pode ser considerado como um conjunto de forças externas que atuam sobre o fluido.

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (5.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 v \quad (5.2)$$

Ao empregar-se o modelo SPH para aproximação numérica deste conjunto de equações, uma das vantagens obtidas é que a utilização de partículas para descrição do fluido torna a

conservação de massa algo inherentemente garantido. Isto ocorre devido ao fato de que em SPH um sistema fluido é representado por um conjunto finito de partículas e cada partícula, por sua vez, possui uma massa constante ao longo de processo de evolução do fluido. Desta forma, a Equação 5.1 já encontra-se satisfeita, tornando necessário apenas uma exploração a cerca do descrito pela equação de conservação de momento, principalmente no que refere-se a pressão e viscosidade do fluido.

O cálculo da pressão em sistemas fluidos, quando estes podem ser representados por conjuntos de partícula que possuem apenas três atributos: massa, posição e velocidade, pode ser feito inicialmente utilizando a equação de gás ideal. Entretanto, para que esta equação possa ser aplicada, é necessário se conhecer o valor da densidade do fluido referente a cada partícula, o qual pode ser obtido através de aproximação SPH, como mostra a seguinte equação:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(x_{ij}, h) \quad (5.3)$$

A partir disso, como descrito anteriormente, o cálculo da pressão inicial é feito utilizando-se a equação de gás ideal, descrita como apresentado na Equação 7.4, onde κ é uma constante de gás.

$$p = (\rho - \rho_0)\kappa \quad (5.4)$$

Após calculado o valor inicial da pressão para um sistema fluido, os valores consequentes de sucessivas interações podem ser obtidos utilizando uma aproximação SPH. Ao aplicar-se esse processo para o cálculo do termo da Equação 5.2 referente a pressão, obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla p_i = \sum_j m_j \frac{p_j}{\rho_j} \nabla W(x_{ij}, h) \quad (5.5)$$

Embora esta equação obtida permita alcançar-se resultados satisfatórios, ela apresenta um problema particular, a não simetria de valores, que pode ser observada quando apenas duas partículas estão em interação. Essa não simetria deve-se ao fato de que, em determinadas condições, quando o gradiente da função W é igual a zero, o valor aproximado para a pressão da partícula i será baseado apenas no valor da pressão da partícula j e vice-versa. Desta maneira, sabendo-se que a pressão em uma determinada região pode mudar em relação a outra região, não ocorrerá simetria durante o cálculo da pressão. Em [Müller et al. 2003a] é proposta a solução deste problema através da utilização dos valores de ambas partículas que participam do processo de aproximação, de modo que a Equação 5.5 passe a possuir o seguinte formato:

$$\nabla p_i = \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(x_{ij}, h) \quad (5.6)$$

Após efetuado o cálculo da pressão em um sistema fluido, é necessário se conhecer a viscosidade em cada partícula que representa tal sistema, representada pelo termo $\mu \nabla^2 v$ da Equação 5.2. Este processo se apresenta de forma análoga ao desenvolvido para a obtenção da equação de aproximação SPH para pressão, de forma que a aplicação da regra de aproximação SPH proporcionará a obtenção da equação seguinte:

$$\mu \nabla^2 v_i = \mu \sum_j m_j \frac{v_j}{\rho_j} \nabla^2 W(x_{ij}, h) \quad (5.7)$$

Semelhantemente ao que é verificado na Equação 5.5, a Equação 5.7 não apresenta simetria na obtenção de valores, uma vez que a velocidade de diferentes partículas é previsivelmente discrepante, o que torna necessário a utilização de formas alternativas desta equação. Seguindo o modelo apresentado por [Müller et al. 2003a], esta equação pode ser aproximada considerando-se a velocidade de ambas partículas envolvidas em uma determinada interação, sendo então descrita como:

$$\mu \nabla^2 v_i = \mu \sum_j m_j \frac{v_j - v_i}{\rho_j} \nabla^2 W(x_{ij}, h) \quad (5.8)$$

A partir deste conjunto de equações de aproximação obtidas através do SPH e de conceitos adicionais como, por exemplo, mecanismo de tratamento de colisão, pode-se modelar visualmente um sistema fluido utilizando técnicas de computação gráfica. Essas estratégias vem sendo exploradas desde o surgimento destas primeiras propostas, sob diferentes ângulos de aplicação, através de uma série de aplicações do método SPH e também casamento deste como outras técnicas. Um exemplo deste tipo de aplicação pode ser observado em [Müller et al. 2003b], onde foi apresentada uma proposta de simulação interativa de fluidos sanguíneos sobre superfícies livres, mostrada na Figura 5.6, através da mesma estratégia utilizada em [Müller et al. 2003a].

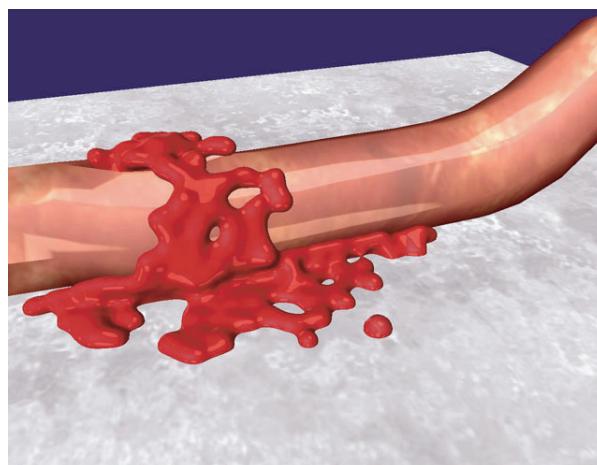


Figura 5.6: Simulação de fluxos sanguíneos através de SPH.

Além destes exemplos, o uso do SPH é encontrado em diversas outras propostas de simulação gráfica, em diversos segmentos de exploração, tanto baseados na estratégia proposta por Müller *et. al.*, como em outros modelos que exploram distintas estratégias de simulação.

5.6 Conclusão

As aplicações existentes na literatura que utilizam o SPH como ferramenta de aproximação mostram que este método é uma considerável solução para problemas de simulação, seja sob fins puramente físicos, computacionais ou ainda em outras linhas de exploração. Além dos exemplos tratados ao longo deste capítulo, o SPH ainda pode ser aplicado a uma série de outros problemas como, por exemplo, no tratamento de corpos elásticos [Clavet et al. 2005], devido a capacidade que o método apresenta de se adaptar ao uso em diferentes teorias.

Esta característica de flexibilidade de utilização apresentada pelo SPH faz surgir a possibilidade de investigação em diversos campos de exploração, de forma que, mesmo com a considerável quantidade de avanços obtidos desde a proposta deste método, é possível ainda se observar a necessidade de pesquisas, seja no próprio aperfeiçoamento do método, para o emprego em situações específicas, ou mesmo no casamento do SPH com outras técnicas, provenientes de diferentes ciências.

A Física dos Buracos Negros

6.1 Introdução

A história do conhecimento humano, desde os tempos mais remotos, sempre demonstrou uma constante imersão de novos conceitos que permitiram o nascimento de teorias e olhares revolucionários sobre o que antes poderia ser descrito como desconhecido. Neste sentido, particularmente ao focar-se na história da física, um dos pontos de evolução mais importantes foi a proposta da teoria da relatividade restrita do físico alemão Albert Einstein, que unificou as dimensões espaciais com o tempo, formando o conceito de espaço-tempo, utilizado como base para descrição de diversos fenômenos observado no universo, através da qual Einstein pôde desenvolver a teoria da relatividade geral.

Basicamente a teoria da relatividade geral descreve que na presença de qualquer tipo de energia, seja esta na forma de matéria ou radiação, o espaço tempo se curva. Esta teoria pode ser facilmente compreendida utilizando um exemplo cotidiano do comportamento de camas elásticas. Uma cama elástica, em estado de repouso, sem nenhum objeto em sua superfície, encontra-se totalmente sem deformações, semelhante ao plano formado por dois eixos no espaço, porém ao colocar-se um peso sobre a cama elástica, esta se deformará, formando uma depressão, a partir deste estado, ao se jogar pequenas bolas sobre a cama elástica, estas se deslocarão até o local onde está o peso. Desta mesma forma, um objeto no universo curva o espaço-tempo próximo a ele, atraindo objetos para si. Através destes resultados, foi possível prever pela primeira vez, em 1916, utilizando-se conceitos matemáticos, a existência de centros de matéria que apresentam uma concentração de força gravitacional tamanha, ou seja, uma curvatura do espaço-tempo tão grande, que é capaz de absorver todo o tipo conhecido de energia, o que posteriormente, especificamente em 1969, foi batizado, pelo cientista americano John Wheeler, como Buraco Negro.

Embora esta previsão de existência de Buracos Negros, realizada pelo astrofísico alemão Karl Schwarzschild, seja baseada nos conceitos apresentados pela teoria da relatividade geral e esteja apresentada de acordo com o embasamento formal necessário para sua descrição, a aceitação da existência dos Buracos Negros não foi algo trivial, principalmente pelas singularidades apresentadas por estes corpos, as quais levaram até o próprio autor da teoria da relatividade geral a indagar a existência destes corpos em um dos seus trabalhos.

A confirmação da existência dos Buracos Negros apenas foi comprovada mais tarde, através da utilização de avançadas técnicas de observação espacial aliadas a cálculos complexos relacionados a este fenômeno. Embora os Buracos Negros ainda sejam considerados como um dos grandes desafios da ciência, os conhecimentos adquiridos já permitem descrever diversas características destes corpos como, por exemplo, conceitos relacionados a sua geometria, termodinâmica, entre outros.

Entretanto, embora as maiores descobertas relacionadas à este fenômeno datem de explorações científicas recentes, a história do estudo da existência de Buracos Negros remete à um episódio mais longínquo da evolução das ciências, quando, entre os limiares da visão renascentista, a física encontrava-se em um dos seus maiores debates, a discussão da natureza da luz, que direta e indiretamente influenciou as primeiras indagações sobre a existência dos Buracos Negros. Neste capítulo será apresentado uma discussão a cerca dos principais conceitos relacionados a este fenômeno, além de uma exploração sobre fatores relacionados a formação dos Buracos Negros assim como propriedades físicas relacionadas a tais corpos, como é o caso da emissão de radiação.

6.2 A Teoria da Luz e as Primeiras Indagações sobre Buracos Negros

Desde a antiguidade, a discussão sobre a natureza da luz apresentou-se como uma das discussões mais marcantes da evolução da física, tendo levantado uma série de investigações e propostas, sejam baseadas em idéias filosóficas ou em contestações empíricas, sobre o que deveria ser a real natureza deste fenômeno. Entretanto, o ponto culminante desta discussão ocorreu durante o renascimento, quando uma frente científica, liderada pelas idéias de Newton acreditava que a luz tratava-se de um fenômeno corpuscular, debateu-se com as idéias ondulatórias, anteriormente propostas por Aristóteles e retomadas no renascimento pelo cientista Huygens.

Durante seus estudos relacionados à natureza da luz, Newton considerou que este fenômeno possuía caráter puramente corpuscular. Para o cientista a luz é a composição de várias partículas ou corpúsculos emitidos por corpos luminosos [Rosmorduc 1985]. Para explicar fenômenos físicos relacionados à luz, como a reflexão e a refração, Newton utilizou propriedades físicas referentes ao estudo da matéria, propondo soluções semelhantes às apresentadas para problemas da mecânica clássica.

Baseando-se em sua proposta de luz corpuscular, Newton apresentou um importante trabalho relacionado à distinção entre as cores. Observando o resultado da incidência de luz branca sobre um prisma triangular, Newton concluiu que a luz branca é a união de distintos corpúsculos de diferentes cores. Cada cor é formada pela união de corpúsculos com propriedades particulares [Einstein and Infeld 1980]. Cada partícula exerce, segundo suas características, uma força sobre o meio. Newton propôs que a intensidade de força varia de forma decrescente, tendo seu limite máximo na cor violeta e seu mínimo na cor vermelha. Tais cores são os extremos observados nos raios de luz emergentes da refração da luz branca em um prisma. Da mesma forma, essa explicação torna-se válida para o fenômeno do arco-íris, considerando que as gotículas de água atuam como material refrator.

Embora a teoria newtoniana sobre a natureza da luz tenha se mostrado artificial, princi-

palmente no que se refere à demonstração de propagação das partículas de luz, ela ganhou força quando o cientista demonstrou ser possível decompor a luz em suas cores componentes, fenômeno este chamado de dispersão da luz, e após isso, misturá-las novamente fazendo-se o processo inverso. Porém, uma nova teoria, completamente contrária à de Newton estava surgindo, sendo capaz também de explicar com sucesso os fenômenos relacionados à luz.

Huygens, um cientista contemporâneo de Newton, apresentou uma teoria sobre a natureza da luz contrária à teoria de Newton. Seguindo a linha de pensamento aristotélica e utilizando seus conhecimentos sobre as propriedades mecânicas das ondas, Huygens desenvolveu a teoria ondulatória da luz. Para o cientista a luz se comporta efetuando a transferência de energia e não de substâncias, ou seja, a luz é um tipo de propagação de vibrações em meios contínuos. Uma das principais razões de Huygens defender sua teoria se deve ao fato da alta velocidade com que a luz se propaga, o que, segundo ele, não poderia ser fruto da propagação de substâncias.

Embora as explicações apresentadas pela proposta de Huygens dispusessem de uma aparência mais racional, durante um longo período, a escolha entre a teoria corpuscular de Newton e a teoria ondulatória de Huygens se mostrou uma complexa tarefa devido à pequena quantidade de provas e demonstrações científicas a cerca do fato. Porém, a maior parte da comunidade científica adotou as idéias de Newton como sendo as corretas. Somente em meados do século XIX, através dos trabalhos de explorações empíricas apresentadas por Young e Fresnel sobre o fenômeno da interferência da luz, a teoria ondulatória obteve triunfo sobre a teoria corpuscular. Apenas anos mais tarde, com o surgimento da física quântica, as ciências conheceriam que ambos os cientistas, Newton e Huygens, tinham sua parcela de correto na explicação da natureza da luz, quando constatou-se que a luz trata-se de um fenômeno de natureza dual onda-matéria.

No mesmo cenário em que se desdobravam as discussões sobre a natureza da luz, debates filosóficos apontavam um fator característico sobre este fenômeno relacionado à velocidade de propagação da luz. De acordo com estas propostas, o deslocamento da luz ocorria em velocidade infinita, o que excluiria qualquer interação da luz com forças gravitacionais. Entretanto, ao descobrir empiricamente o caráter finito sobre a velocidade da luz, o cientista dinamarquês Olaüs Röemer abriu campo para investigações do comportamento deste fenômeno em regiões de grande concentração de força gravitacional.

Uma das primeiras propostas relacionadas à possível existência de corpos que afetam o deslocamento da luz de tal maneira que o impede de seguir seu fluxo previsto foi apresentado por John Michell em 1783. O cientista descreveu a possível existência de estrelas que poderiam possuir uma quantidade de massa tamanha, compactada sobre uma pequena região, de modo a formar um campo gravitacional gigantesco que não permitisse que a luz pudesse escapar e, consequentemente, embora fosse previsível, de acordo com o cientista, a existência de diversas estrelas nesta situação, seria impossível observá-las, uma vez que qualquer raio de luz emitido seria atraído de volta [Hawking 1988].

Uma proposta semelhante foi apresentada, independentemente, por Laplace em 1795. Em seu trabalho o cientista previu a existência de corpos celestes que possuíssem características tais que não permitiriam que qualquer forma de energia escapasse deste corpo. Embora o trabalho realizado por Laplace utilizasse apenas a base descrita pela física clássica, suas previsões ainda permaneceram na física moderna. De acordo com o trabalho apresentado pelo cientista, a velocidade de escape de tais corpos deve ser maior que a velocidade da luz [Laplace 1795].

Desta forma, a velocidade de escape de um corpo, classicamente definida como $v = \sqrt{2GM/R}$, descreve a seguinte relação para tais corpos:

$$R < 2GM/c^2. \quad (6.1)$$

onde G é a constante de Newton, com valor igual a $6,67 \times 10^{-11} m^3/kgs^2$, M é a massa do Buraco Negro em questão e c é a velocidade da luz.

Embora Laplace viera a publicar sua idéia por duas vezes consecutivas, acabou abandonando-a posteriormente, talvez pelo ambiente de discussão sobre a natureza da luz em que encontrava-se, o que poderia confrontar-se com suas idéias, ou mesmo, como citado por alguns intelectuais da área, por acreditar que sua proposta não passava de mera "loucura" de sua imaginação.

Ulteriormente, com o surgimento da teoria da relatividade, a explicação da influência da gravidade sobre a luz e a apresentação teórica sobre o comportamento dos Corpos Negros, quando então foram definidas a equação de relação entre temperatura T e comprimento de onda máximo λ de um corpo emissor de radiação (Equação 6.2), onde b é a constante de dispersão de Wien, tal que $b = 2.897 \times 10^{-3}$, as idéias apresentadas por Michell e Laplace começaram a tomar um sentido mais palpável, instigando outra vez cientistas sobre a possível existência destes corpos de gigantesco campo gravitacional, que posteriormente seriam chamados de Buracos Negros.

$$\lambda_{max}T = b \quad (6.2)$$

6.3 A Exploração Pós-Criação da Teoria da Relatividade

6.3.1 Os Buracos Negros de Schwarzschild

Embora, mesmo diante das avanços científicos alcançados no início do século XX, principalmente em referência ao nascimento da física moderna, pouco se acreditasse em relação à existência de Buracos Negros, o físico e astrônomo alemão Karl Schwarzschild ousou investigar a existência de tais corpos, a partir dos preceitos ditados pela teoria da relatividade de Einstein. Através de suas explorações, Schwarzschild conseguiu demonstrar que caso a massa de uma estrela esteja densamente concentrada sobre uma pequena região ela apresentará um campo gravitacional intenso sobre sua superfície, o qual impediria até a luz de escapar [Hawking 2001].

Através do trabalho desenvolvido por Schwarzschild foi possível se explorar importantes propriedades relacionadas aos Buracos Negros negros, principalmente no que refere-se a geometria destes corpos, no que ficou conhecido como a métrica de Schwarzschild [Giugno 2001]. Em seu trabalho, o físico apresentou solução para Buracos Negros perfeitamente esféricos e estáticos, consequentemente sem apresentar momento angular e, a partir da Teoria da Relatividade, descreveu o raio do horizonte de eventos de um Buraco Negro de tal tipo, conhecido como raio de Schwarzschild, o qual foi descrito como:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.3)$$

Embora atualmente saiba-se que o trabalho realizado por Schwarzschild seja realmente válido para Buracos Negros estáticos e esféricos, ela permaneceu sem entendimento durante vários anos, tanto pela complexidade das equações que levaram até a concepção dela quanto pela hostilidade em aceitar explorações relacionadas à existência de Buracos Negros, o que também foi observado com outras propostas apresentadas na mesma época.

6.3.2 O Limite de Chandrasekhar

Ao final da década de 1920 o indiano Subrahmanyan Chandrasekhar iniciou explorações a cerca dos estágios finais do ciclo de vida de uma estrela. Instigado principalmente pelos fatores que rodeiam o equilíbrio estrelar, isto é, o equilíbrio que uma estrela mantém graças à relação entre força gravitacional, que tende a fazer este corpo compactar-se, e a repulsão interna de partículas, que pressiona as paredes estelares à uma expansão, o cientista questionou se haveria um limite para essa exo-força causada pela repulsão de partículas.

Após realizar uma série de cálculos, baseados na Teoria da Relatividade, Chandrasekhar concluiu que uma estrela, ao tornar-se extremamente densa, possuirá força gravitacional maior que a exo-força de repulsão das partículas internas, e em determinadas condições de calor e massa, a estrela não será mais capaz de sustentar-se, entrando, consequentemente, em colapso gravitacional [Chandrasekhar 1935]. Esse limite de massa, batizado de limite de Chandrasekhar, é representado de acordo com a seguinte equação:

$$M_{Ch} = \frac{\omega_3^0 \sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \quad (6.4)$$

onde ω_3^0 é a constante de Lane-Emden, \hbar a constante de Planck, c a velocidade da luz, G é a constante gravitacional universal, μ_e a massa molecular média por elétron e m_H a massa do átomo de hidrogênio.

Através dos resultados apresentados pelo trabalho de Chandrasekhar foi possível descrever os estágios finais do ciclo de vida de uma estrela de acordo com as propriedades físicas apresentadas por tais corpos. Através disso, consagraram-se, então, os conceitos de Anãs Brancas, Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros, porém este último ainda recebia olhares de indagação. Embora estes resultados apresentassem uma base científica suficiente para sua confirmação ou, ao menos, sua aceitação como melhor teoria para descrever tais fenômenos, eles não foram bem aceitos pela comunidade científica, de tal modo que Chandrasekhar acabou por abandonar os seus trabalhos na área.

Apesar destas indagações levantadas a cerca da existência dos Buracos Negros apresentarem grandes obstáculos na exploração científica de tais corpos durante um longo intervalo de tempo, os estudos apresentados por Schwarzschild e Chandrasekhar começavam a ganhar força, principalmente pelas descobertas realizadas no campo de exploração do ciclo de vida estelar. Baseado neste conjunto de conhecimento, os físicos Robert Oppenheimer e Hartland

Snyder concluíram algo semelhante ao descrito pelo limite de Chandrasekhar [Hawking 1988]. De acordo com o trabalho apresentado por eles, no momento em que o combustível nuclear de uma estrela é extinto, o equilíbrio existente neste corpo desaparece e, durante este processo, caso a massa da estrela seja suficientemente grande, o colapso estelar ocasionado pelo desequilíbrio de forças irá concentrar toda a matéria em uma pequena região, o que gerará o que se conhece como Buraco Negro.

Semelhantemente ao realizado por Chandrasekhar, Oppenheimer, em conjunto com o cientista George Volkoff, apresentou, baseado em um trabalho apresentado por Richard Tolman, no qual era descrito um conjunto de soluções para as equações de campo de Einstein em esferas fluidas [Tolman 1939], propuseram um limite máximo à massa das estrelas de nêutrons deve possuir [Oppenheimer and Volkoff 1939], que ficou conhecido como limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Além disso, Oppenheimer também constatou, baseado na teoria da relatividade, que as trajetórias de raios de luz são alteradas pelo campo gravitacional de uma estrela, o que poderia então ser utilizado como um mecanismo de detecção de Buracos Negros. Entretanto, esta exploração apenas iria ser utilizada anos mais tarde, com o advento de novas tecnologias de exploração espacial do pós Segunda Guerra.

6.4 Horizonte de Eventos

Após a Segunda Guerra Mundial, período este que deteve a atenção científica quase que totalmente voltada para o aperfeiçoamento de técnicas e teorias relacionadas ao poderio armamentista, principalmente ao desenvolvimento da bomba atômica, iniciou-se um grande número de investimentos em explorações espaciais, o que proporcionou o ressurgimento do interesse pela investigação de questões ligadas a astronomia e a cosmologia. Neste cenário, deduções e comprovações científicas consolidaram a teoria de campo gravitacional das estrelas, a qual descreve que raios de luz na presença de um campo gravitacional suficientemente grande tem sua trajetória alterada no espaço-tempo [Hawking 1988].

A Figura 6.1, clássica na descrição de Buracos Negros pela literatura referente ao assunto, apresenta de uma maneira esclarecedora o comportamento de feixes de luz na presença de grandes campos de gravidade. Na figura pode-se observar a reação dos cones de luz, os quais representam as trajetórias dos raios de luz no espaço-tempo, quando aproximam-se da estrela, alterando sua trajetória sutilmente para dentro. Além disso, através do apresentado pela figura, pode-se notar que com o passar do tempo a estrela tende a se tornar mais compacta e possuir um maior campo gravitacional e, consequentemente, uma maior influência sobre os feixes de luz que passam pela região, de tal modo, que a partir de um ponto limite os feixes de luz não poderão escapar de seu campo gravitacional, quando a estrela é então descrita como um Buraco Negro.

Essa região limita envolta de um Buraco Negro que demarca o ponto máximo de impedimento do escape dos feixes de luz foi denominada, durante a década de 1950, pelo físico Wolfgang Rindler, de horizonte de eventos [Castiñeiras et al. 2006]. Este nome foi escolhido principalmente pela relação que possui com a idéia de horizonte que se possui na Terra. Ao observar-se o horizonte, percebe-se que não se pode ver o que está além dele, da mesma ocorre em um Buraco Negro, um observador espacial que esteja na região externa ao horizonte de

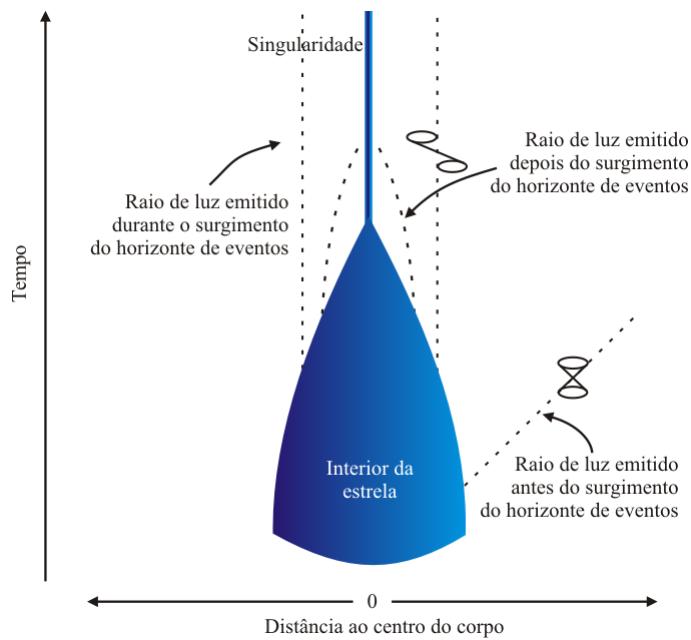


Figura 6.1: Representação dos cones de luz na presença de Buracos Negros.

eventos não pode ver o que existe dentro desta região, o que explicado pelo fato de que raios de luz não podem escapar desta região e, mesmo, objetos massivos, ao alcançarem tal região são atraídos cada vez mais para o Buraco Negro, até alcançarem uma região de altíssima densidade de energia e volume mínimo, denominada de singularidade, onde são indefinidamente esmagados e compactados.

6.5 “Entropia” de Buracos Negros

A teoria que descreve os Buracos Negros prevê que estes são envoltos de uma região limite onde a força de atração presente é tamanha que não permite que nada possa escapar, o qual é denominado de horizonte de eventos. Sob um ponto de vista mais intrusivo, o horizonte de eventos pode ser considerado como a composição das trajetórias, no espaço-tempo, dos raios de luz que não conseguem se afastar do Buraco Negro, permanecendo indefinidamente na margem dele.

De acordo com estudos iniciais desenvolvidos por Hawking e Roger Penrose, as trajetórias dos raios de luz presentes na margem do horizonte de eventos nunca podem aproximar-se entre si, desenvolvendo um movimento evolutivo sempre paralelo ou de afastamento [Hawking 1988]. Segundo a teoria apresentada e matematicamente comprovada por Hawking e Penrose, uma consequência notável do comportamento destes raios de luz no espaço-tempo é que a área do horizonte de eventos jamais diminuirá, permanecendo constante em seu tamanho ou aumentando, caso contrário, os raios de luz consequentemente deveriam se colapsar.

Uma importante propriedade referente ao tamanho da área do horizonte de eventos de um Buraco Negro, semelhante a uma propriedade física denominada de entropia, a qual mede o grau de desordem de um sistema, é que sempre que um Buraco Negro entra em colapso com

outro, ou seja, se funde a outro Buraco Negro, a área do horizonte de eventos resultante será igual ou maior que a soma da área do horizonte de eventos de ambos, antes do processo de colapso. Além disso, sempre que algum tipo de matéria ou energia é consumido por um Buraco Negro, a área de seu horizonte de eventos também aumenta (Figura 6.2).

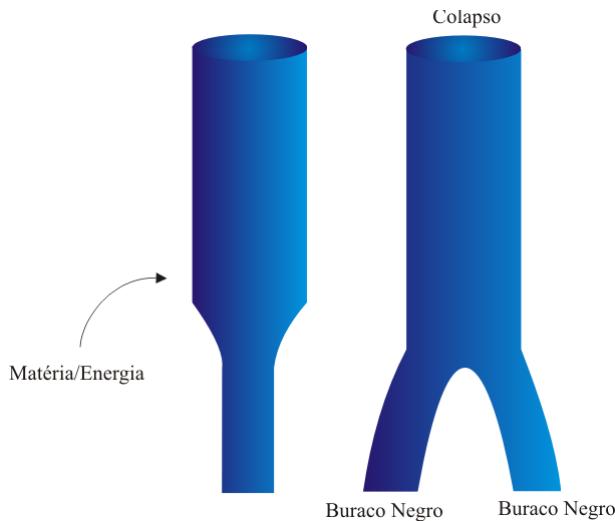


Figura 6.2: Variação da área do horizonte de eventos: absorção de matéria ou energia pelo Buraco Negro e colapso entre dois Buracos Negros.

Essa característica apresentada pelos Buracos Negros se assemelha fortemente com a Segunda Lei da Termodinâmica, a qual prevê que um sistema isolado sempre possui sua entropia constante ou acrescida e que a soma de dois sistemas sempre proporciona uma entropia maior que a soma da entropia apresentada por ambos os sistemas antes da união [Greiner et al. 2008]. Essa relação, juntamente com os trabalhos desenvolvidos na exploração das características do horizonte de eventos dos Buracos Negros, de certa forma, intuiu o cientista americano Jacob Bekenstein a propor uma teoria que explicasse uma das grandes questões relacionadas aos Buracos Negros: o equilíbrio entre a entropia externa e interna destes corpos.

Ainda hoje não se pode dizer com certeza o que existe dentro de um Buraco Negro e também como a matéria contida nele realmente se comporta e, consequentemente, a entropia interna à região do horizonte de eventos é desconhecida. Porém, uma questão essencial que surge intuitivamente ao analisar-se a entropia do universo em referência à atuação dos Buracos Negros é que estes, comportando-se como sorvedouros de energia, possuem uma influência quase que direta no equilíbrio da entropia do universo, em outras palavras, o universo possui uma determinada entropia, a qual de acordo com o previsto por leis físicas sempre tenderá a aumentar, como os Buracos Negros consomem energia e matéria, consequentemente estão “consumindo” tal entropia, o que violará as leis da Termodinâmica, desta forma, deve então existir alguma relação entre esta entropia do universo e os Buracos Negros, principalmente o que guardam em seu interior.

A proposta de Bekenstein para explicar o problema foi relacionar a área do horizonte de eventos à entropia interna do Buraco Negro, a qual, de acordo com o sucessivo consumo de matéria e energia, tende a aumentar [Bekenstein 1973]. Embora a teoria apresentada pelo

cientista estivesse de acordo com os preceitos principais das leis da Termodinâmica e explicasse de forma considerável o equilíbrio da entropia do universo sob a influência dos Buracos Negros, ela apresentava uma falha em um ponto crucial, revelado pelas próprias leis da Termodinâmica. De acordo com estas leis, se um corpo possui entropia, logo também possuirá temperatura e, consequentemente, um corpo que possui temperatura será um emissor de radiação, mesmo que esta não esteja na faixa visível aos olhos humanos. A partir disso, a teoria desenvolvida por Bekenstein implica que os Buracos Negros são capazes de emitir radiação, o que entra em contradição com a definição formal dos Buracos Negros, aceita até então, que descreve tais como corpos que absorvem todo o tipo de matéria e energia.

Esta contradição implicou que o trabalho desenvolvido por Bekenstein fosse descartado como uma possível solução do problema da entropia interna dos Buracos Negros. O próprio Stephen Hawking apresentou uma série de trabalhos revelando pontos críticos na teoria de Bekenstein que dificultavam sua aceitação. Entretanto, com o desenvolvimento de sucessivas pesquisas relacionadas ao problema foi possível perceber que a relação entre horizonte de eventos e entropia interna dos Buracos Negros poderiam ter um determinado grau de verdade e, desta forma, os Buracos Negros serem capazes de emitir um determinado tipo de radiação.

6.6 A Radiação de Hawking

A exploração científica dos fenômenos que envolvem os Buracos Negros levou dois cientistas russos, Yakov Zeldovich e Alexander Starobinsky, a desenvolverem um trabalho que demonstrou a existência de emissão de radiação em Buracos Negros rotativos. Em sua proposta, os cientistas se basearam em conceitos da Mecânica Quântica, principalmente no que refere-se ao Princípio da Incerteza, o qual prevê limites para a precisão em medidas simultâneas de valores referentes à pares de grandezas relacionadas entre si [Beiser 2002]. Embora o trabalho de Zeldovich e Starobinsky apresentasse uma demonstração fisicamente suficiente para sua explicação, a matemática apresentada exibia alguns problemas que dificultaram a aceitação da proposta deles, porém, ainda assim, o trabalho foi continuado por Hawking, o qual o reformulou através de um modelo matemático mais conveniente ao problema em questão.

A proposta de descrição matemática apresentada por Hawking em relação a radiação de Buracos Negros mostrou que não apenas os Buracos Negros rotativos são emissores de radiação como previa a teoria de Zeldovich e Starobinsky, mas também os estáticos apresentam este tipo de fenômeno. De acordo com Hawking, um dos pontos mais fortes na validação de sua teoria foi o fato de que os cálculos desenvolvidos para a emissão de radiação de Buracos Negros proporcionaram resultados semelhantes aos observados pela emissão de radiação de um corpo aquecido qualquer, o que, desta forma, previniu a violação da Segunda Lei da Termodinâmica [Hawking 1988].

Esta comprovação matemática da existência de emissão de radiação por Buracos Negros fez emergir uma importante discussão a certa das propriedades destes corpos. De acordo com sua descrição formal, os Buracos Negros são corpos capazes de consumir todo o tipo de matéria e energia incidente sobre ele, entretanto a descrição apresentada por Hawking mostra que tais corpos são emissores de radiação, desta forma surge um ponto vago na justificação da teoria da radiação de Buracos Negros. Porém, de acordo com a Mecânica Quântica, o espaço que

normalmente é denominado como vácuo apresenta determinadas flutua  es quânticas, ou seja, a formão e aniquila  o constante, porém não definida, de pares de partículas.

Basicamente, estes pares de partículas, formados por partícula e anti-partícula, também chamados de partículas virtuais, são gerados e separados durante um determinado tempo e após isso encontram-se novamente aniquilando-se. Entretanto, quando estes pares de partículas estão no limiar    fronteira do horizonte de eventos de um Buraco Negro, apresentam peculiaridades em seu comportamento. Por exemplo, durante o processo de concep  o se uma anti-partícula “cair” dentro do Buraco Negro s  r   consumida por este, como esta anti-partícula possui energia negativa, o Buraco Negro perderá energia para se balancear com ela. O par partícula da anti-partícula consumida pelo Buraco Negro estará livre e escapar   para o infinito, dando, a um observador distante, a impressão de emissão de radia  o pelo Buraco Negro. Como as propriedades da partícula e anti-partícula são iguais em módulo, logo essa “emissão” de radia  o acontecerá na mesma taxa de perda energia do Buraco Negro. A Figura 6.3 apresenta o processo de emissão de radia  o de um Buraco Negro.

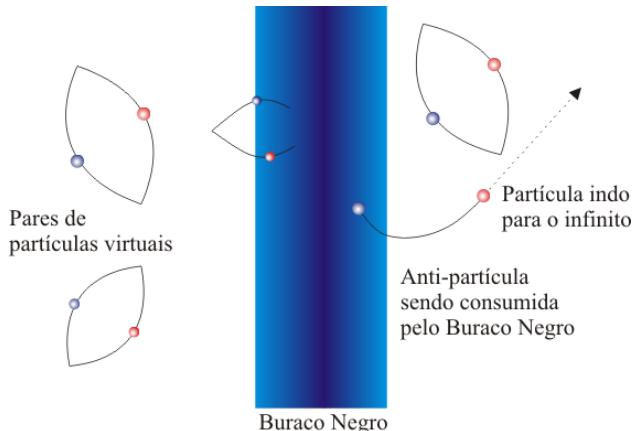


Figura 6.3: Comportamento de partículas virtuais na presença de um Buraco Negro.

De acordo com o previsto pelos c  culos de Hawking, a radia  o emitida por um Buraco Negro ´  variável de acordo com sua temperatura T , a qual ´  calculada de acordo com a seguinte fórmula:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi kGM} \quad (6.5)$$

onde \hbar ´  constante de Planck, c a velocidade da luz, k a constante de Boltzmann, G a constante gravitacional de Newton e M a massa do Buraco Negro. Analisando-se a fórmula pode-se perceber que quanto maior for o Buraco Negro, menor deverá ser a sua temperatura. Uma abordagem mais formal e completa dos conceitos físicos descritos pela teoria da radia  o de Hawking pode ser encontrada em [Hawking 1975].

6.7 Conclusão

Classicamente, os Buracos Negros, deduzidos por soluções das equações da teoria da relatividade geral e experimentalmente comprovados por observações indiretas, foram consagrados como objetos super-massivos e compactos que são capazes de atrair e consumir todo tipo de matéria e energia que se aproximar dele, e tal definição ainda hoje é considerada como uma das melhores descrições de tais objetos. Porém, contrariando boa parte do que se acreditava saber sobre tais corpos, a descoberta de que Buracos Negros não são completamente negros, sendo capazes de emitir radiação, abriu caminho para a compreensão de diversas questões relacionadas à tais corpos. Apesar disso, os Buracos Negros ainda guardam muitos segredos que desafiam os limites das ciências e impõe barreiras que se transpostas poderiam ajudar a alcançar o entendimento de diversas questões existentes, inclusive, relacionadas ao surgimento e destino do universo.

Um Modelo de Simulação Gráfica de Buracos Negros Utilizando Sistemas de Partículas e Smoothed Particle Hydrodynamics

7.1 Introdução

A simulação de fenômenos reais utilizando a Computação Gráfica sempre se mostrou uma grande ferramenta de auxílio ao desenvolvimento técnico-científico, permitindo a verificação de previsões que outrora não poderiam ser observadas visualmente. Essa característica da Computação Gráfica tem se mostrado consideravelmente importante, não apenas em questões relacionadas com simulações de caráter meramente industrial, mas também em questões ligadas à simulação de fenômenos da natureza. Neste sentido, a utilização da Computação Gráfica, tanto na simulação de cenas e objetos que extrapolam o universo cotidiano terrestre, quanto no auxílio à visualização de informações fornecidas por dispositivos de captação de imagens espaciais, tem surgido como uma forte aliada no avanço científico de ciências como a astrofísica.

Essa flexibilidade característica da Computação Gráfica tem tornado possível sua aplicação em diversas simulações de fenômenos espaciais. Entretanto, é importante observar que a utilização dos conceitos dispostos por esta área da Ciência da Computação torna necessário o emprego de peculiaridades inerentes aos problemas tratados, uma vez que determinados fenômenos espaciais possuem um aparato de descrição física comportamental relativamente distinto do que é classicamente previsto e um dos exemplos que mais evidencia estas características são os Buracos Negros.

Neste capítulo será descrito uma proposta de simulação gráfica de Buracos Negros, uma área de pesquisa inovadora na Computação Gráfica, explorando, principalmente, dois aspectos referentes a estes corpos, a formação de discos de acresção e a emissão de radiação, prevista por Stephen Hawking. Neste sentido, o trabalho apresentará as estratégias de abstração e representação utilizadas para a concepção da simulação, baseadas no modelo de aproximação *Smoothed Particle Hydrodynamics* e no método Sistemas de Partículas, o qual receberá ligeiras alterações que o adéquem às características exibidas pelos Buracos Negros. Ao final do capítulo

serão apresentados resultados obtidos com a implementação da proposta, assim como uma discussão relativa à validação do trabalho, as dificuldades encontradas e considerações técnicas.

7.2 Aplicação do SPH na Simulação de Discos de Acresção

7.2.1 Abstração das Características Físicas dos Discos de Acresção

A utilização do método de aproximação SPH na Computação Gráfica se apresenta como uma considerável solução de aproximação na simulação de fenômenos naturais, principalmente em representações de fluidos líquidos baseadas nos conceitos físicos descritos pelas Equações de Navier-Stokes (ver Capítulo 5), entretanto sua utilização, nesta área da Computação Gráfica, para fins distintos da simulação de fluidos líquidos ainda é algo pouco explorado, embora, em outras ciências, o método apresente uma grande utilização em diversas áreas, como é o caso da simulação de fenômenos astrofísicos.

Neste trabalho é proposta a concepção de uma simulação gráfica de eventos relacionados a um dos mais instigantes fenômenos astronômicos “conhecidos” pelo ser humano, os Buracos Negros, utilizando o método SPH como ferramenta de aproximação no cálculo de características concernentes à dinâmica dos discos de acresção formados em torno destes corpos.

Para que os discos de acresção possam ser simulados utilizando o método SPH é necessário que as características deste fenômeno sejam abstraídas de acordo com um formato mais adequado ao método. O método SPH, como discutido no Capítulo 4, é um modelo de aproximação baseado em partículas, a partir disso o conjunto de matéria formador do disco de acresção pode ser considerado como um conjunto de partículas que possuem características que representam o movimento desenvolvido por elas no disco de acresção, entre as quais destacam-se: posição, velocidade, massa, densidade, pressão e energia termal, as quais são representadas nos cálculos de acordo com o apresentado na Tabela 7.2.

Variável	Símbolo
posição	p
velocidade	v
aceleração	a
massa	m
densidade	ρ
pressão	P
energia termal	u

Tabela 7.1: *Descrição das principais variáveis das partículas utilizadas no método SPH.*

A partir da definição do disco de acresção como um conjunto de partículas e das características básicas de cada uma destas, é necessário modelar o comportamento apresentado por tais partículas, de acordo com os parâmetros do comportamento apresentado por um disco de acresção na presença de um buraco negro. De uma forma geral, tal comportamento deverá ser dependente de dois fatores principais: as forças hidrodinâmicas F_{Hi} , envolvidas no relacionamento entre as diversas partículas do sistema, e a força gravitacional F_{Gi} desempenhada sobre

uma partícula, proporcionada pelo buraco negro, de acordo com o apresentado pela Equação 7.1, que pode ser escrita como o disposto pela Equação 7.2.

$$F_i = F_{Gi} + F_{Hi} \quad (7.1)$$

$$m_i a_i = F_{Gi} + F_{Hi} \quad (7.2)$$

O cálculo da força gravitacional de cada partícula do sistema será obtido utilizando a Lei da Gravitação Universal, formulada pelo inglês Isaac Newton, que prevê que dois corpos se relacionam entre si através de uma força de atração dependente de suas massas. A Equação 7.3 apresenta a formulação da Lei da Gravitação Universal, onde G é a constante gravitacional, m_i é a massa da partícula i , M é a massa do buraco negro e, finalmente, d é a distância entre a partícula e o centro do buraco negro. Esta equação é aplicada individualmente para cada partícula nos sucessivos passos da simulação do sistema proposto, fornecendo sua contribuição para o comportamento apresentado pelas partículas.

$$F_{Gi} = G \frac{m_i M}{d^2} \quad (7.3)$$

Além da força de gravitação, também é necessário conhecer a contribuição das forças hidrodinâmicas presentes no disco de acresção. Entretanto, o cálculo destas forças se apresenta de uma forma consideravelmente complexa, o que torna necessária a utilização de um método de aproximação.

7.2.2 Aplicando o Método SPH para Obtenção das Forças Hidrodinâmicas

Nesta seção será apresentado a estratégia de obtenção da contribuição devido às forças hidrodinâmicas envolvidas no comportamento apresentado pelo objeto problema do sistema simulado. Esse conjunto de informações referente a F_{Hi} (Equação 7.2) é moldado principalmente pela pressão e a velocidade referente a cada partícula i analisada. Para tal foi adotada uma estratégia de simulação baseada na proposta apresentada por [Lee and Kluźniak 1999], onde o método SPH foi utilizado para a simulação numérica de sistemas binários, formados por Estrelas de Nêutrons e Buracos Negros.

Neste sentido, durante o processo de simulação, determinadas propriedades devem ser iniciadas com valores adequados ao problema a ser representado. No caso particular da simulação de discos de acresção ao redor de Buracos Negros, cada partícula deve possuir inicialmente valores pré-definidos para massa, volume, posição inicial e velocidade. A partir disso, os demais valores das variáveis do sistema deverão ser calculados nos consecutivos passos de execução, utilizando as regras de aproximação do SPH.

Inicialmente, em cada passo da simulação, deve ser calculado o valor de pressão P_i de cada partícula. Embora este valor não seja diretamente aproximado via SPH, ele é dependente de variáveis que tornam necessária a aplicação do método. No caso particular do presente trabalho, P_i é calculado de acordo com uma equação de gás ideal:

$$P_i = (\Gamma - 1) u_i \rho_i \quad (7.4)$$

onde Γ é o índice adiabático.

Para que o método SPH seja aplicado nas variáveis que demandam aproximação, por definição, é necessário estabelecer uma função de suavização W (ver Capítulo 4), que, em outras palavras, atuará no processo como uma função de ponderação. O núcleo de suavização utilizado no trabalho será baseado no modelo descrito por [Monaghan and Lattanzio 1985], onde:

$$W(x, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{h}\right)^3, & 0 \leq (|x|/h) < 1, \\ \frac{1}{4} \left(2 - \frac{x}{h}\right)^3, & 1 \leq (|x|/h) < 2, \\ 0, & 2 \leq (|x|/h). \end{cases}$$

A Figura 7.1 apresenta a curva obtida através da função peso considerada no trabalho, para valores de x entre -10 e 10 e $h = 3$.

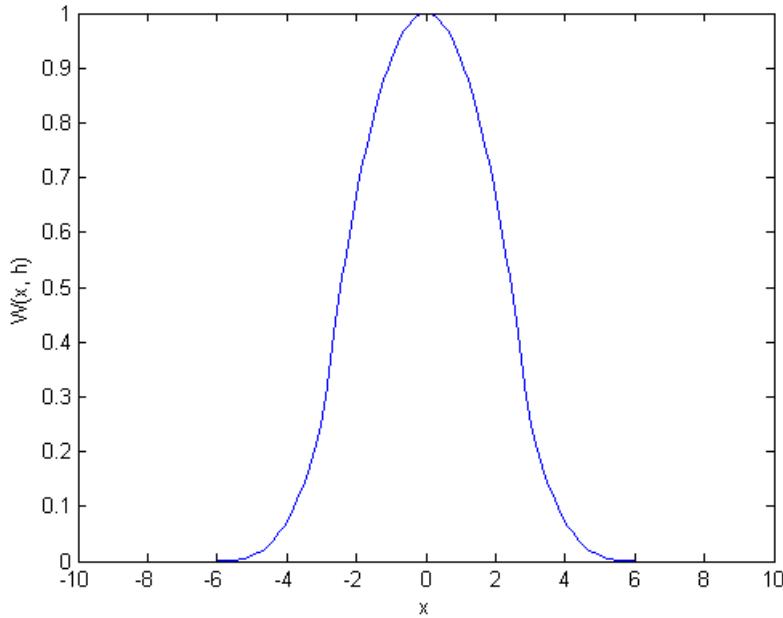


Figura 7.1: Curva da função peso para um valor $h = 3$.

A partir disso, a densidade ρ em cada partícula pode então ser calculada através do SPH. Aplicando as regras SPH para este valor, obtém-se a seguinte função para o cálculo desta variável:

$$\rho_i = \sum_j m_j W(x_{ij}, h) \quad (7.5)$$

De acordo com o descrito pela estratégia disposta em [Lee and Klužniak 1999], o valor da força hidrodinâmica F_{Hi} , aproximado através do SPH, pode então ser calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$F_{Hi} = - \sum_j m_j m_i \left(2 \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \nabla W(x_{ij}, h) \quad (7.6)$$

onde o valor de Π_{ij} é calculado pela seguinte expressão:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha \bar{v}_{s_i} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2) / \bar{\rho}_{ij}, & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0, & v_{ij} \cdot x_{ij} > 0. \end{cases}$$

a qual descreve a viscosidade artificial, tal que,

$$\mu_{ij} = \frac{h(v_{ij} \cdot x_{ij})}{x_{ij} \cdot x_{ij} + \eta^2 h^2} \quad (7.7)$$

Na Equação 7.7 v_{ij} e x_{ij} referem-se respectivamente às diferenças de velocidade e posição das partículas i e j . Os valores α , β e η são constantes e, baseado em verificações experimentais desenvolvidas por [Lee and Klužniak 1999], tem seus valores definidos, sucessivamente, como 1, 2 e 10^{-1} . Além disso, v_{s_i} é a velocidade do som em relação a posição i , de tal modo que $\bar{v}_{s_i} = (v_{s_i} + v_{s_j})/2$ e, analogamente, $\bar{\rho}_{ij} = (\rho_i + \rho_j)/2$.

Outro fator a ser considerado durante o cálculo da contribuição da força hidrodinâmica é a energia termal, a qual é dependente, principalmente, da velocidade apresentada pelas partículas. A equação final proposta para o cálculo da energia termal, baseado no método SPH, é descrita da seguinte forma:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j m_j \left(2 \frac{\sqrt{P_i P_j}}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) v_{ij} \nabla W(x_{ij}, h) \quad (7.8)$$

O cálculo da energia termal u_i é então obtido via método de Euler, da seguinte forma:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (7.9)$$

onde u_i^0 é inicializado através do Sistema de Partículas.

Além da simulação do comportamento do disco de acresção de Buracos Negros, desenvolvida através da formulação apresentada nesta seção, o trabalho também se propõe a representar a emissão de radiação destes corpos através da utilização de um modelo baseado em Sistemas Partículas, denominado de Sistemas de Partículas Virtuais, o qual será descrito na próxima seção.

7.3 Aplicação de Sistemas de Partículas para Simulação da Radiação de Buracos Negros

7.3.1 Sistemas de Partículas e a Simulação de Radiação

A utilização do método Sistema de Partículas, denominados aqui de SPc, para a simulação de fenômenos da natureza é algo bastante explorado na Computação Gráfica, e tem apresentado resultados consideravelmente satisfatórios ao longo de seu histórico evolutivo. Um exemplo clássico de simulação utilizando este tipo de estratégia está na representação de efeitos que envolvem a combustão de matéria, onde Sistemas de Partículas produzem resultados com uma grande variedade visual de detalhes. Estes tipos de simulações assemelham-se ligeiramente ao que poderia ser a simulação de determinados tipos de radiação visíveis. Exemplos destes tipos de simulação podem ser observados em [Reeves 1983; Ilmonen and Kontkanen 2003; Zhou et al. 2006].

Este tipo de aplicação foi preliminarmente explorado neste trabalho, onde o método Sistemas de Partículas foi utilizado para a simulação da radiação de Corpos Negros. A Figura 7.2 apresenta um resultado da simulação da radiação de Corpo Negro, em condições em que a radiação é emitida sob uma freqüência de aproximadamente 480nm.

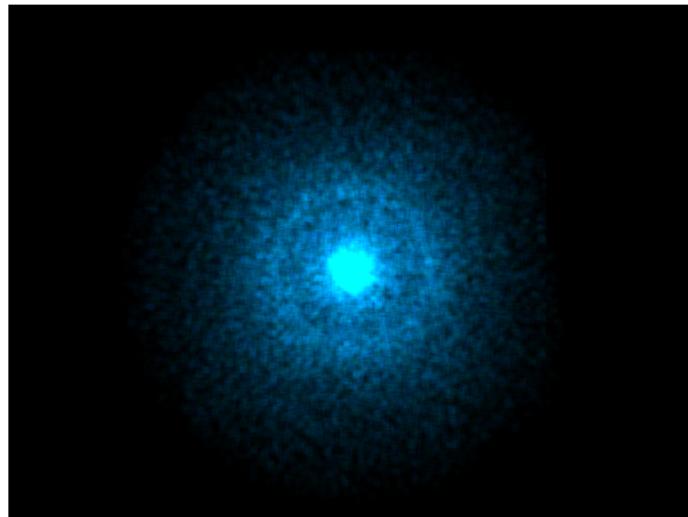


Figura 7.2: Exemplo da aplicação de Sistemas de Partículas para simulação de Corpos Negros.

Embora o método Sistemas de Partículas tenha se mostrado adequado para a simulação da radiação de Corpos Negros, a sua aplicação para a radiação de Buracos Negros pode tornar necessários tratamentos não previstos pela teoria clássica deste modelo de representação da Computação Gráfica, uma vez que a radiação emitida pelos Buracos Negros apresenta uma série de particularidades. Neste sentido, este trabalho apresenta uma proposta de representação que une os conceitos do modelo Sistemas de Partículas com a teoria envolvida na radiação de Buracos Negros, em um método denominado *Sistemas de Partículas Virtuais* (SPV).

7.3.2 O Modelo de Representação *Sistemas de Partículas Virtuais*: Uma Proposta

De acordo com o descrito pela Mecânica Quântica, determinadas regiões do espaço onde comumente acredita-se serem ausentes de matéria e energia, são povoadas por partículas virtuais, isto é, partículas que a todo momento surgem em pares de partícula e anti-partícula, e um tempo depois, quando estas se chocam, são aniquiladas. Entretanto, em regiões extremamente próximas ao horizonte de eventos de um Buraco Negro, um dos elementos do par pode ser consumido pela singularidade, deixando o outro livre. Caso este elemento consumido seja uma anti-partícula, seu par, uma partícula com energia positiva seguirá sua trajetória livremente, dando a impressão a um observador a distância de se tratar de uma emissão de radiação e, como esta anti-partícula consumida possui energia negativa, logo o Buraco Negro deverá perder energia para manter o seu equilíbrio (Maiores detalhes podem ser obtidos no Capítulo 6).

A partir disso, a aplicação do método Sistemas de Partículas para a simulação da radiação de Buracos Negros pode ser melhor desenvolvida através de algumas alterações que adéquem o método ao contexto físico destes corpos. Estas considerações específicas, de uma forma geral, não afetam a estrutura básica utilizada no sistema de simulação, particularmente no que refere-se à representação de um objeto problema como um conjunto finito de partículas, as quais possuem características responsáveis por descrever o comportamento destas ao longo do tempo e podem ser alteradas utilizando funções randômicas. A principal diferença entre a proposta de SPV e os Sistemas de Partículas clássicos refere-se à determinação do nascimento “real” das partículas, o qual, no caso específico das partículas virtuais, pode ser considerado como o momento em que uma partícula é efetivamente renderizada.

Na proposta de SPV, durante a execução do sistema são geradas aleatoriamente partículas virtuais. Tais partículas, embora concebidas no sistema, não são efetivamente renderizadas, seguindo durante seu tempo de vida trajetórias aleatórias. Durante este tempo de vida, as partículas virtuais são condicionadas a duas situações: serem extintas do sistema, dando lugar a outra partícula ou tornarem-se partículas reais.

A extinção de uma partícula virtual poderá ocorrer sob diversas formas, de acordo com a necessidade do sistema, semelhante ao descrito pelos Sistemas de Partículas clássicas [Reeves 1983]. Por outro lado, regras pré-determinadas podem também ser impostas ao sistema, a fim de que as partículas virtuais, ao serem condicionadas a determinadas situações, tornem-se partículas reais. Através disso, acredita-se obter uma maior semelhança com a realidade para determinados tipos de simulações. Na próxima subseção é descrito o uso desta estratégia para a simulação da radiação de Buracos Negros.

7.3.3 *Sistemas de Partículas Virtuais* na Simulação da Radiação de Buracos Negros

Na simulação da radiação de Buracos Negros através de SPV, durante a fase de nascimento, cada partícula virtual forma um par de partícula e anti-partícula, as quais possuem propriedades opostas entre si. Tais partículas são geradas em uma região limiar à fronteira do horizonte de eventos do Buraco Negro, sendo condicionadas a uma estrutura de nascimento esférica (ver Capítulo 2). A posição de nascimento de cada partícula virtual é obtida aleatoriamente, assim

como os valores do vetor velocidade, os quais não são necessariamente iguais em módulo para partícula e anti-partícula. Após o seu nascimento, o destino de uma partícula virtual, neste caso se referindo ao par partícula e anti-partícula, dependerá de fatores relacionados, principalmente, à trajetória descrita por estas.

Uma partícula virtual se extinguirá do sistema caso se choque com sua companheira, a qual possui características opostas, ou se seu tempo de vida pré-determinado for atingido, o que, nesta situação, fará com que o par partícula e anti-partícula seja extinto, mesmo estando distantes entre si. Após uma partícula virtual ser extinta, outra é gerada automaticamente pelo sistema, em uma posição definida aleatoriamente. Caso uma partícula virtual, ao ser gerada, tenha um dos elementos do par sendo consumido pelo buraco negro, seu companheiro então se tornará uma partícula real, sendo, a partir disso, renderizado pelo sistema, seguindo o pressuposto ditado pela relação entre Princípio da Incerteza e Buracos Negros. A partir do momento em que um elemento do par se torna uma partícula real, este recebe um novo valor para seu tempo de vida. Este processo é apresentado na Figura 7.3.

Evento	Ação	Figura
Nascimento dos pares partículas/anti-partículas	Elemento segue sua trajetória	7.3a
Elemento atinge horizonte de eventos	Elemento eliminado	7.3b
Choque de partícula e anti-partícula	Par eliminado	7.3c
Partícula/anti-partícula sem par	Partícula renderizada (radiação)	7.3c

Tabela 7.2: *Regras do SPV.*

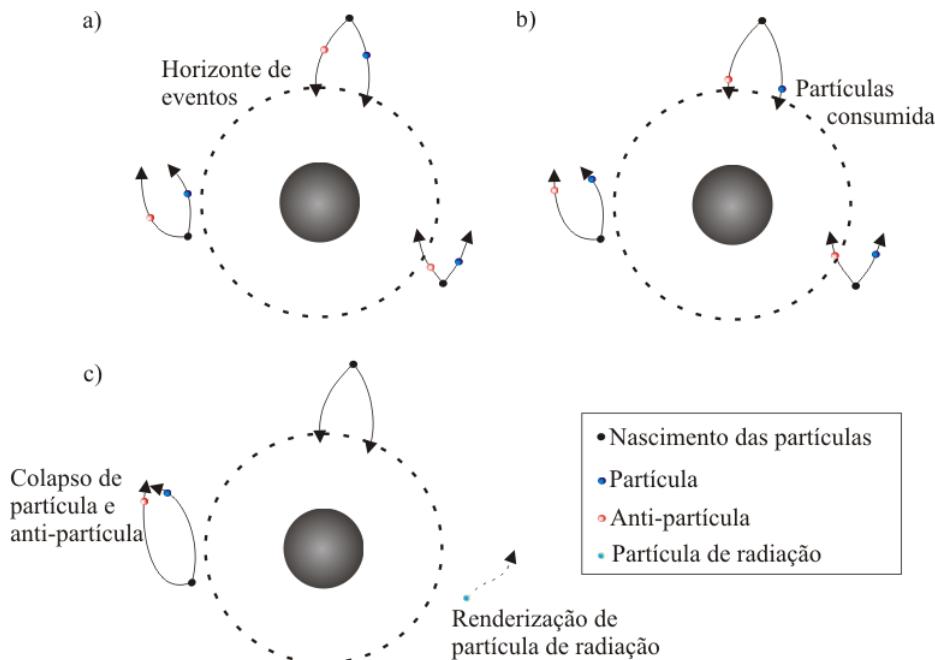


Figura 7.3: Comportamento das partículas virtuais na proposta de *Sistemas de Partículas Virtuais*.

Ao ser renderizado, o elemento do par partícula e anti-partícula automaticamente terá definida sua cor (RGB) de acordo com o comprimento de onda da radiação emitida, obtida através da Lei de Wien para Corpos Negros (Equação 6.2). Durante esse processo, este elemento renderizado também recebe um valor pré-definido para seu canal de cor *alpha*, o qual é então decrementado, de forma suave, nos sucessivos passos de renderização, até alcançar um valor igual ou próximo de zero.

O cálculo do comprimento de onda da radiação emitida está diretamente relacionado com a temperatura do Buraco Negro, calculada pela Equação 6.5 (maiores detalhes sobre a Equação podem ser obtidos no Capítulo 6). A partícula renderizada segue sua trajetória em um tempo de vida determinado e após isso é extinta, dando lugar a uma nova partícula virtual e, desta forma, continuando o ciclo de simulação, o qual é apresentado mais detalhadamente na descrição da implementação do sistema.

7.4 Simulação Gráfica de Buracos Negros

7.4.1 A API OpenGL

A implementação do sistema de simulação de Buracos Negros proposto utilizará como ferramenta base para sua implementação a API gráfica OpenGL (*Open Graphics Library*). De um modo geral, o padrão OpenGL pode ser definido um conjunto de funções que trabalham a interface com *hardware* gráfico, permitindo a exploração de efeitos como cor, transparência, textura, iluminação, e também a geração de formas geométricas, superfícies, entre outros, compreendendo a maioria dos conceitos abordados no desenvolvimento de aplicações gráficas, o que proporciona a concepção satisfatória de objetos e cenários virtuais.

Atualmente a OpenGL é desenvolvida por um grupo originado ainda durante sua criação, o *Architecture Review Board* (ARB), composto por diversas empresas que atuam na área de processamento e criação gráfica, o qual é responsável por atualizações e inserções de comandos referentes a novas técnicas da Computação Gráfica. Além das contribuições adquiridas através da ARB, o OpenGL, por se tratar de uma ferramenta de código livre, também recebe diversos aperfeiçoamentos provenientes de comunidade sem fins lucrativos, o que aumenta ainda mais a gama de opções de aplicação desta ferramenta.

Além disso, a estrutura apresentada pelo OpenGL, semelhante a diversas linguagens de programação consagradas na Ciência da Computação, é suficientemente flexível para a aplicação de regras e conceitos referentes a inumeráveis tipos de simulação. Tal flexibilidade, adicionada ao conjunto de funções de criação e manipulação gráfica tornam o OpenGL como uma boa opção para a simulação proposta, simplificando o processo de implementação das regras comportamentais descritas pela partículas que representam o disco de acresção e a emissão de radiação simuladas através do SPH e de Sistemas de Partículas.

Apesar disso, o OpenGL apresenta uma ligeira desvantagem em relação a outras ferramentas de renderização. Os resultados visuais apresentados não apresentam qualidade visual comparável a resultados obtidos com a utilização, por exemplo, de ferramentas de renderização *Ray Tracing*, como é o caso do Pov-Ray, que trabalha com algoritmos de renderização mais

poderosos que os nativos do OpenGL. Entretanto, essa perda visual não impede o acompanhamento do comportamento apresentado pelo objeto de simulação.

7.4.2 Aproximações Físicas

Durante o processo de implementação da simulação de Buracos Negros, algumas aproximações físicas foram consideradas, a fim de obter-se ganho em tempo de processamento. Tais aproximações exploram principalmente características apresentadas pelo disco de acresção, tanto em relação à sua formação quanto ao seu comportamento.

Uma das primeiras aproximações está ligada à forma apresentada pelas partículas que compõe o disco de acresção. Em um sistema real, tais partículas podem apresentar inimagináveis tamanhos e formatos, variáveis de acordo com sua origem, as quais englobam asteróides, pedaços de matéria e energia provindos de explosões estelares, planetas, poeira espacial, entre outros. Além disso, tais corpos, ao entrarem no disco de acresção de um Buraco Negro, vão se deformando a medida que se aproximam da singularidade, fragmentando-se em diversas partes, devido a grande diferença da força gravitacional incidente sobre eles. Porém, no sistema de simulação proposto, este conjunto de informações, tanto referente aos corpos no momento de chegada ao disco de acresção, quanto à sua deformação ao longo do tempo, são ignorados, uma vez que quando analisados em relação a extensão física do fenômeno como um todo, tais variações apresentam pouca influência, principalmente quando vistas por um observador a distância.

Outra aproximação considerada durante à simulação refere-se também às partículas que compõe o disco de acresção. Como relatado anteriormente, estas chegam de diversas regiões do espaço, tanto provindas de áreas próximas aos Buracos Negros quanto do espaço profundo, o que matematicamente pode representar uma estabilidade no comportamento apresentado por tais corpos quando entram no disco de acresção, isto é, caso sejam aferidos valores de propriedades destes corpos como pressão e densidade, estes terão níveis estáveis em relação ao ambiente em que estão imersos. Por outro lado, no sistema proposto as partículas que compõe o disco de acresção são geradas aleatoriamente sobre a circunferência que define a sua fronteira externa, contendo os valores de suas propriedades definidos aleatoriamente, o que pode provocar uma certa instabilidade no sistema, porém como trata-se de uma simulação sob fins visuais, o erro obtido com tal instabilidade não interfere na simulação do comportamento do fenômeno.

Finalmente, as partículas que compõe o disco de acresção, no momento em que alcançam o horizonte de eventos do Buraco Negro, região esta que representa o espaço de onde nem a própria luz é capaz de escapar, são “extintas” do sistema, isto é, tem os valores de suas propriedades redefinidos para uma nova partícula, gerada na região de nascimento do disco de acresção. Tal aproximação é justificada pelo fato de que um observador a distância não é capaz de vizualizar os efeitos internos ao horizonte de eventos. Através desta e das aproximações apresentadas anteriormente, é possível se alcançar um considerável ganho no tempo de processamento do sistema de simulação e uma simplificação em seu processo de implementação.

7.4.3 Implementação

Baseado nas definições descritas nas seções anteriores, foi implementado um sistema de simulação de Buracos Negros em um espaço tri-dimensional, a fim de representar graficamente o comportamento de discos de acresção em redor destes corpos e a emissão de radiação emanada por eles. Para fins de simulação, as variáveis não aproximadas via SPH receberam valores iniciais utilizando funções randômicas, as quais fornecem resposta em uma faixa pré-estabelecida, a qual será discutida na próxima seção.

A Figuras 7.4 apresenta o diagrama de execução para os módulos de simulação do disco de acresção e do sistema de emissão de radiação. Através desta é possível observar que após ser executado, o sistema se manterá ativo indefinidamente, atualizando em cada passo as variáveis das partículas que representam o objeto problema. É importante observar que o sistema é dividido em dois sub-sistemas, os quais são executados simultaneamente, um referente à simulação do disco de acresção e outra da emissão de radiação. Detalhes mais específicos sobre a implementação podem ser acompanhados no Algoritmo 1.

É importante observar que o conjunto de partículas que descreve o disco de acresção foi determinado como um conjunto finito e limitado, tendo seu tamanho definido no momento da simulação. Este conjunto de partículas pode ser descrito através de uma estrutura de dados tipo *array*. Uma estrutura mais complexa e dinâmica poderia ser utilizada, porém as vantagens obtidas com tal estratégias seriam pequenas, uma vez que a quantidade de matéria incidente sobre um Buraco Negro, caso este não esteja em um sistema binário¹, não é consideravelmente grande, o que justifica a utilização de um *array* na representação de um disco de acresção.

7.4.4 Inicialização das Variáveis do Sistema

Durante a fase de implementação do algoritmo de simulação de Buracos Negros é necessário elaborar um esquema de definição de valores de variáveis que independem do cálculo através de equações SPH, como é o caso da massa das partículas, e também de algumas constantes que tem crucial importância no comportamento adquirido pelo sistema. Além disso, esta fase demanda também a exploração de alguns detalhes técnicos, principalmente em relação a uma melhor obtenção do resultado visual adquirido. Desta forma, é necessário se conhecer como os valores iniciais do sistema são calculados, tanto em relação aos utilizados pela representação do disco de acresção quanto da emissão de radiação. Nesta seção serão apresentados os processos envolvidos nestes cálculos, divididos em duas partes, a primeira descrevendo as relações referentes ao disco de acresção e a segunda à emissão de radiação.

Quando uma partícula do disco de acresção é gerada, ela deve então receber valores para suas variáveis, os quais são obtidos de acordo com tipo de variável a ser tratado, isto é, se estas variáveis são calculadas via SPH ou se tiverem seus valores definidos via SPc. Os valores calculados através do SPH referem-se à densidade ρ_i , pressão P_i e energia termal u_i . Por outro lado, os valores calculados via SPc referem-se a posição inicial $x^0 = (w_i^0, y_i^0, z_i^0)$, a velocidade inicial $v^0 = (v_{wi}^0, v_{yi}^0, v_{zi}^0)$, o raio de nascimento r_i , utilizado no cálculo da posição inicial, e a

¹Sistema binário é um sistema formado por dois corpos gravitacionalmente ligados. Quando um Buraco Negro é um dos elementos de um Sistema Binário, ele consumirá seu par até que este desapareça por completo.

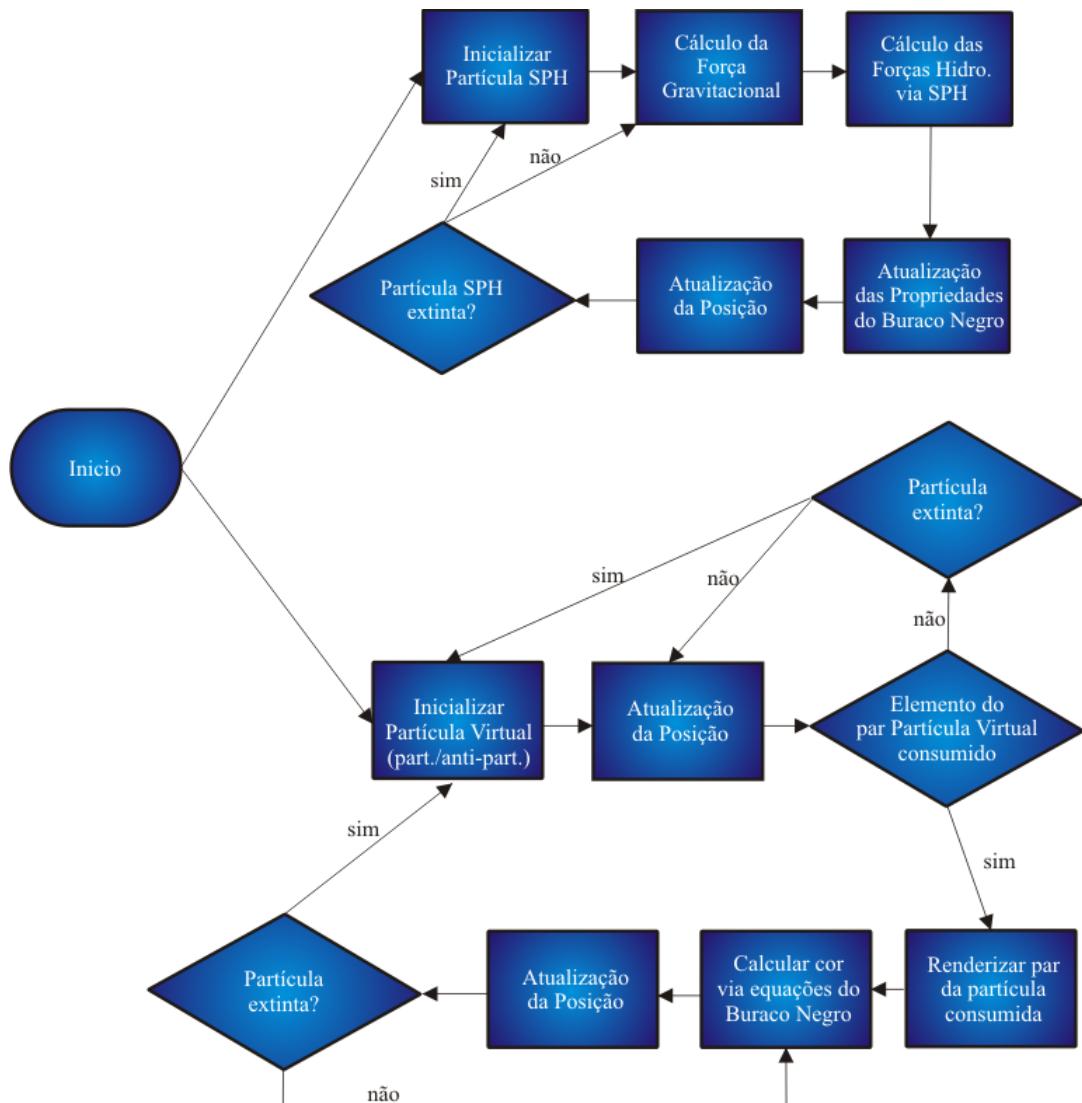


Figura 7.4: Diagrama de execução para o módulo de simulação do disco de acresção.

massa m_i . Estes valores, calculados via SPc, são definidos no momento do nascimento de uma partícula através da seguinte função randômica:

$$\begin{aligned}
 rand(\alpha, \varphi) = \alpha + r(\varphi) \mid & \quad \varphi, \alpha \in \mathbb{R}, \\
 & r(\varphi) \in [0, \varphi], \\
 & \alpha \leq \alpha + r(\varphi) \leq \alpha + \varphi.
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

onde α refere-se ao valor mínimo adquirido pela função e $\alpha + \varphi$ o seu valor máximo. A partir disso foram definidos as faixa de valores relativos às variáveis massa, posição e velocidade das partículas que compõe o disco de acreção. A Tabela 7.3 apresenta os valores de α e φ utilizados na simulação. Além disso, o valor do raio do disco de acreção também é calculado de forma

semelhante, utilizando-se uma função randômica, a qual tem seus valores também descrito pela Tabela 7.3.

Um importante detalhe na definição das propriedades iniciais das partículas do disco de acresção é a posição inicial x^0 . No sistema proposto, a posição inicial destas partículas deve estar contida em uma região próxima ao limite externo do disco de acresção, representado por r_i . Desta forma, a posição inicial da partícula i é obtida através da avaliação das seguintes equações:

$$\begin{aligned} w_i^0 &= r_i \cos(\gamma_i) \\ y_i^0 &= r_i \sin(\gamma_i) \\ z_i^0 &= \text{rand}(\zeta_i) \end{aligned}$$

onde os valores de γ_i e r_i , relativo ao raio do disco de acresção, são obtidos randomicamente (Tabela 7.3), e ζ_i é uma constante.

Outra importante característica a ser considerada durante a fase de inicialização das partículas é a determinação da velocidade. No momento de nascimento de cada partícula, esta recebe um valor para seu vetor velocidade (Tabela 7.3). Esta estratégia de representação se caracteriza pelo fato de que a todo momento partículas podem alcançar o disco de acresção, sob diferentes direções, desta forma, a aleatoriedade assumida garante a imprevisibilidade de “chegada” de novas partículas no disco de acresção.

Variável	α	φ	$\alpha + r(\varphi)$
ζ_i	0,0	$5,0 \times 10^{-1}$	$[0,0; 5,0 \times 10^{-1}]$
γ_i	0,0	2π	$[0,0; 2\pi]$
r_i	$5,0 \times 10^0$	$1,0 \times 10^{-1}$	$[5,0 \times 10^0; 5,1 \times 10^0]$
v_{wi}^0	$1,5 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^{-2}$	$[1,5 \times 10^{-1}; 2,0 \times 10^{-1}]$
v_{yi}^0	$1,5 \times 10^{-1}$	$5,0 \times 10^{-2}$	$[1,5 \times 10^{-1}; 2,0 \times 10^{-1}]$
v_{zi}^0	$0,0 \times 10^0$	$5,0 \times 10^{-2}$	$[0,0 \times 10^0; 5,0 \times 10^{-2}]$
m_i	$1,0 \times 10^{-5}$	$1,0 \times 10^{-4}$	$[1,0 \times 10^{-5}; 1,1 \times 10^{-4}]$

Tabela 7.3: Descrição das faixas de valores possíveis para as variáveis pré-computadas do disco de acresção.

Por outro lado, os valores das variáveis aproximadas via SPH são calculados através do conjunto de equações descrito na Seção 7.2. Estas variáveis englobam densidade, pressão e energia termal, tendo seus valores alterados em cada passo de tempo, de acordo com as condições apresentadas pelo ambiente em que a partícula está imersa.

Além dos valores das variáveis das partículas que compõe o disco de acresção, alguns valores de variáveis das partículas que representam o processo de emissão de radiação também são determinados no momento de nascimento, utilizando a mesma função randômica explorada para as partículas do disco de acresção (Equação 7.10). A Tabela 7.4 apresenta a faixa de valores utilizada na implementação. Os demais valores são calculados de acordo com a descrição

apresentada na Seção 7.3, tais valores referem-se a posição inicial $X^0 = (W_i^0, Y_i^0, Z_i^0)$, velocidade inicial $V^0 = (V_{wi}^0, V_{yi}^0, V_{zi}^0)$, raio de nascimento R_i , massa m_i e tempo de vida.

Entretanto, é importante observar que o cálculo da posição inicial das partículas demanda um tratamento específico. Tais partículas, na simulação proposta, devem ser geradas sobre uma região esférica, inerente ao horizonte de eventos do Buraco Negro (o cálculo do horizonte de eventos será descrito na Seção 7.4.5), desta maneira, uma solução encontrada para a determinação da posição inicial X^0 das partículas da radiação é através da avaliação das seguintes equações:

$$\begin{aligned} W_i^0 &= R_i \cos(\beta_i) \cos(\theta_i) \\ Y_i^0 &= R_i \cos(\beta_i) \sin(\theta_i) \\ Z_i^0 &= R_i \sin(\beta_i) \end{aligned}$$

onde os valores β_i , θ_i e R_i , referente ao raio de emissão de radiação, são calculados randomicamente (Tabela 7.4).

Variável	α	φ	$\alpha + r(\varphi)$
β_i	0, 0	2π	$[0, 0; 2\pi]$
θ_i	0, 0	2π	$[0, 0; 2\pi]$
R_i	$2,0 \times 10^{-1}$	$1,0 \times 10^{-2}$	$[2,0 \times 10^{-1}; 2,1 \times 10^{-1}]$
V_{wi}^0	$1,0 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$[1,0 \times 10^{-2}; 1,1 \times 10^{-2}]$
V_{yi}^0	$1,0 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$[1,0 \times 10^{-2}; 1,1 \times 10^{-2}]$
V_{zi}^0	$1,0 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-3}$	$[1,0 \times 10^{-2}; 1,1 \times 10^{-2}]$
Tempo de vida	$8,0 \times 10^2$	$4,0 \times 10^2$	$[8,0 \times 10^2; 1,2 \times 10^3]$
m_i	$1,0 \times 10^{-7}$	$1,0 \times 10^{-6}$	$[1,0 \times 10^{-7}; 1,1 \times 10^{-6}]$

Tabela 7.4: *Descrição das faixas de valores possíveis para as variáveis pré-computadas das partículas que representam a emissão de radiação.*

Finalmente, é necessário efetuar a descrição dos valores das constantes utilizadas ao longo da implementação. Tais constantes referem-se principalmente à características diretamente ligadas aos Buracos Negros, como a sua massa inicial M^0 , e constantes que surgem nas equações que descrevem o comportamento do sistema. A Tabela 7.5 apresenta os valores das constantes considerados na simulação proposta.

7.4.5 Evolução do Sistema

Além da inicialização do sistema, é necessário se conhecer como as variáveis que representam o disco de acresção e a emissão de radiação possuem seus valores alterados ao longo do tempo, a fim de representar o comportamento descrito pelos Buracos Negros. Neste sentido, esta seção apresentará os conceitos essenciais para a atualização de valores como a massa do Buraco Negro,

Constante	Símbolo	Valor
Raio de suavização	h	$1,0 \times 10^{-1}$
Constante adiabática	Γ	$3,0 \times 10^1$
Constante de Boltzman	κ	$1,4 \times 10^{-23}$
Constante de Planck	\hbar	$6,6 \times 10^{-34}$
Constante gravitacional	G	$6,6 \times 10^{-11}$
Massa inicial do Buraco Negro	M^0	$1,0 \times 10^5$

Tabela 7.5: Descrição dos valores das constantes utilizadas na implementação do sistema de simulação de Buracos Negros.

posição das partículas, raio do horizonte de eventos, entre outros, e além disso, serão destacados também os processos condicionais do sistema como, por exemplo, a extinção de partículas.

A massa do Buraco Negro simulado, inicialmente, recebe um valor M^0 , como descrito na seção anterior. Entretanto, este valor é alterado a medida que partículas são consumidas pela singularidade. Esta atualização de massa ocorre da seguinte maneira: quando uma partícula i é consumida pelo Buraco Negro, a massa m_i é adicionada a massa M , através de uma soma simples. Esta alteração de massa implicará em uma alteração do raio do horizonte de eventos, o qual deverá ser então re-calculado. O novo valor para este raio é calculado de acordo com a Equação 6.3.

A massa do Buraco Negro além de ser influenciada pelo consumo de partículas do disco de acresção também é alterada, de forma análoga, quando partículas de radiação incidem sobre a singularidade. Porém, é importante observar que as partículas de radiação, antes de tornarem-se partículas reais (renderizadas) se comportam como partícula e anti-partícula, desta forma, quando uma partícula é consumida a massa M é acrescida e, por outro lado, quando uma anti-partícula alcança a singularidade, M é decrescida.

Outro ponto importante a ser destacado é a atualização da posição das partículas. A atualização deste valor, para as partículas que representam o disco de acresção, é efetuada utilizando-se como base a Equação 7.2, a qual fornecerá a aceleração de cada partícula i do sistema. A partir disso, como se conhece a posição e velocidade anteriores da partícula, representadas abaixo por x_i^0 e v_i^0 , em um determinado tempo, logo basta aplicar estes valores para avaliação da equação de deslocamento mostrada a seguir:

$$x_i = x_i^0 + v_i^0 \Delta t + \frac{a_i \Delta t^2}{2} \quad (7.11)$$

A atualização da posição das partículas que representam a emissão de radiação é desenvolvida de forma análoga ao descrito pelas partículas do disco de acresção. Além do cálculo da posição, as partículas que representam a radiação, quando renderizadas, também demandam o cálculo da cor. Este cálculo é dependente, principalmente, da massa M apresentada pelo Buraco Negro no momento em que uma partícula de radiação é renderizada. Para isso, é calculada a temperatura do Buraco Negro (Equação 6.5) e, a partir disso, o comprimento de onda da radiação (Equação 6.2). Desta forma, basta aplicar-se um algoritmo de conversão da

distribuição espectral, referente ao comprimento de onda, para o modelo RGB. Na simulação foi utilizado um método de conversão de distribuição espectral para o modelo de representação de cores XYZ e, desta forma, do modelo XYZ para o modelo RGB [Gomes and Velho 2003].

Além destas considerações referentes a evolução dos valores das propriedades das partículas, processos condicionais são considerados pelo sistema de simulação. Um destes processos refere-se a extinção de partículas. Antes de descrever este processo, é importante lembrar que a extinção de uma partícula não se refere a eliminação desta do sistema, mas sim a sua reutilização, através de um processo de “reciclagem”, no qual a partícula extinta recebe novos valores, comportando-se como uma nova partícula do sistema.

O processo de extinção das partículas que representam o disco de acresção ocorre da seguinte forma: em cada passo de tempo é verificado a distância de cada partícula i em relação ao centro do Buraco Negro, se esta distância for menor ou igual ao raio do horizonte de eventos, então esta partícula é extinta, sendo então inicializada com novos valores. Neste momento, a massa do Buraco Negro é atualizada, como descrito anteriormente.

As partículas que representam a emissão de radiação apresentam um processo de extinção relativamente semelhante ao das partículas do disco de acresção. Entretanto, existem considerações específicas, uma vez que tais partículas são divididas em reais e virtuais. No caso das partículas virtuais, quando um elemento do par atinge o horizonte de eventos, ele não é extinto necessariamente, sendo seu par ser renderizado, passando a ser uma partícula real. As partículas serão apenas extintas, efetivamente, quando ambos os elementos do par forem consumidos pela singularidade, sejam eles virtuais, caso atingem o horizonte de eventos no mesmo instante, ou um dos elementos real. Além disso, a extinção das partículas de radiação também considera o tempo de vida delas, o qual é decrescido indefinidamente, cada vez que a posição é atualizada. Caso o tempo de vida seja nulo, então a partícula é extinta, recebendo novos valores em suas variáveis.

Outro procedimento importante, relacionado às partículas de radiação, é a aniquilação de partículas. Cada partícula virtual, durante sua inicialização, refere-se a um par partícula e anti-partícula, os quais possuem valores de massa opostos, isto é, se a partícula i possui massa m a anti-partícula i possuirá massa $-m$, sendo que $|m| = |-m|$. A partir disso, durante cada iteração, são comparadas as posições da partícula e anti-partícula de um mesmo par, caso elas encontrem-se na mesma posição, logo elas deverão aniquilar-se (Seção 6.6), o que equivale a extinção das partículas. Deste modo, esta partícula virtual recebe novos valores em suas variáveis.

7.4.6 Visualização

Além das descrições comportamentais do sistema de simulação efetuadas através das equações e da definição dos valores das variáveis, algumas considerações técnicas devem ser levadas em conta a fim de se alcançar os resultados visuais apresentação na próxima Seção. Entre estas questões destacam-se a determinação da estrutura geométrica das partículas, o mapeamento de textura em tais partículas e a aplicação da técnica *Motion Blur* sobre as partículas que representam o disco de acresção.

Cada partícula do sistema é representada através da utilização de duas primitivas geométrica do tipo quadrilátero. Estas primitivas são geradas de forma estarem perpendiculares entre si,

como pode ser observado na Figura 7.5. A partir disso, é aplicado um mapeamento de textura sobre tais primitivas, utilizando a textura destacada na Figura 7.5, o que dará a impressão ao observador de se tratar de um partícula com formato ligeiramente esférico, mascarando os traços artificiais expressos nas primitivas quadriláteras.

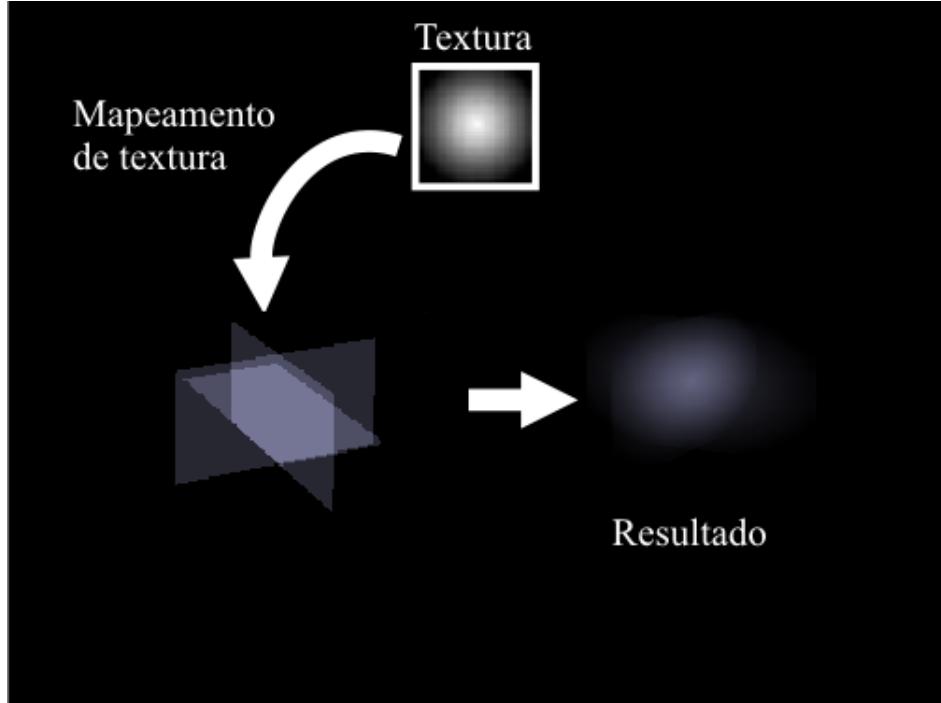


Figura 7.5: Descrição geométrica das partículas do sistema e aplicação de mapeamento de textura.

Finalmente, é aplicado sobre as partículas do disco de acresção o efeito de renderização *Motion Blur* [Potmesil and Chakravarty 1983]. Este efeito gera a impressão de a partícula, ao se deslocar, gerar um rastro ligeiramente próximo a ela, em outras palavras, a visualização obtida para cada partícula será a semelhante de uma cauda de cometa, o que proporciona um maior realismo à simulação. Outras técnicas de renderização podem ser aplicadas para se alcançar uma maior qualidade visual nos resultados, entretanto é importante observar que esta aplicação pode ocasionar em um maior custo computacional.

7.5 Resultados

Nesta seção serão apresentados alguns resultados obtidos através da implementação da proposta de simulação descrita neste capítulo. Embora o sistema desenvolvido seja suficientemente flexível para ser implementado em diferentes tipos de ferramentas, os fins de simulação levaram à escolha da API OpenGL, como descrito na Seção 7.4.1. Esta escolha gera uma pequena desvantagem em relação à qualidade dos resultados obtidos, porém permite ao usuário acompanhar passo a passo a simulação e, inclusive, caso seja necessário, pode abrir formas de

interação durante o processo de execução. As Figuras 7.8 e 7.7 apresentam resultados obtidos através da implementação do sistema proposto.

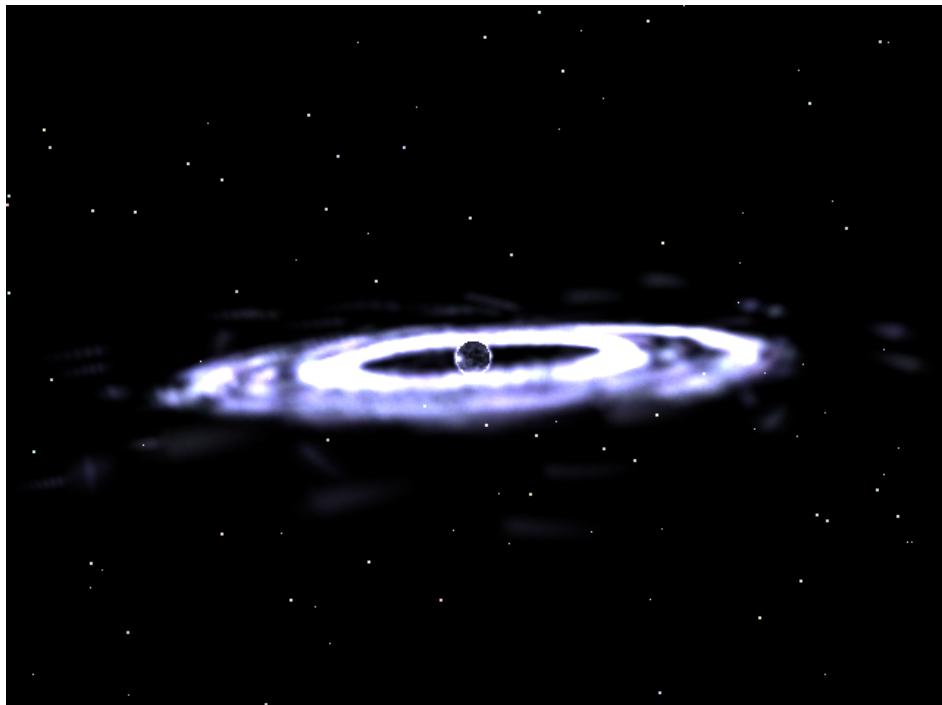


Figura 7.6: Simulação do disco de acresção de um Buraco Negro através da aplicação do SPH com 2000 partículas.

As Figuras 7.9 e 7.10 apresentam os gráficos de escalabilidade do sistema através de uma variação na quantidade de partículas a serem utilizadas na representação. O primeiro gráfico apresenta a taxa de quadros por segundo obtida, observe que quando o sistema trabalha com uma quantidade de 1.000 partículas, a taxa obtida está entre 15 e 20 quadros por segundo, o que pode ser considerável razoável para uma simulação em tempo real. O segundo gráfico apresenta o tempo de processamento demandado pela CPU, como a simulação presente não se preocupou em utilizar métodos específicos de gerenciamento de memória, o tempo de processamento aumenta a medida que cresce o número de partículas, porém estes resultados podem ser melhorados aperfeiçoando-se as estratégias de gerenciamento utilizadas. Tais resultados de escalabilidade foram obtidos executando-se a simulação em um processador Core 2 - 1.8 GHz com 2Gb de RAM.

7.6 Validação da Proposta

Após a fase de implementação do sistema de simulação de Buracos Negros, tornou-se necessária a determinação de uma estratégia de validação da proposta a fim demonstrar a real legitimidade dos resultados obtidos. Esta fase do trabalho apresentou consideráveis obstáculos devido às peculiaridades existentes no modelo proposto em relação aos métodos similares

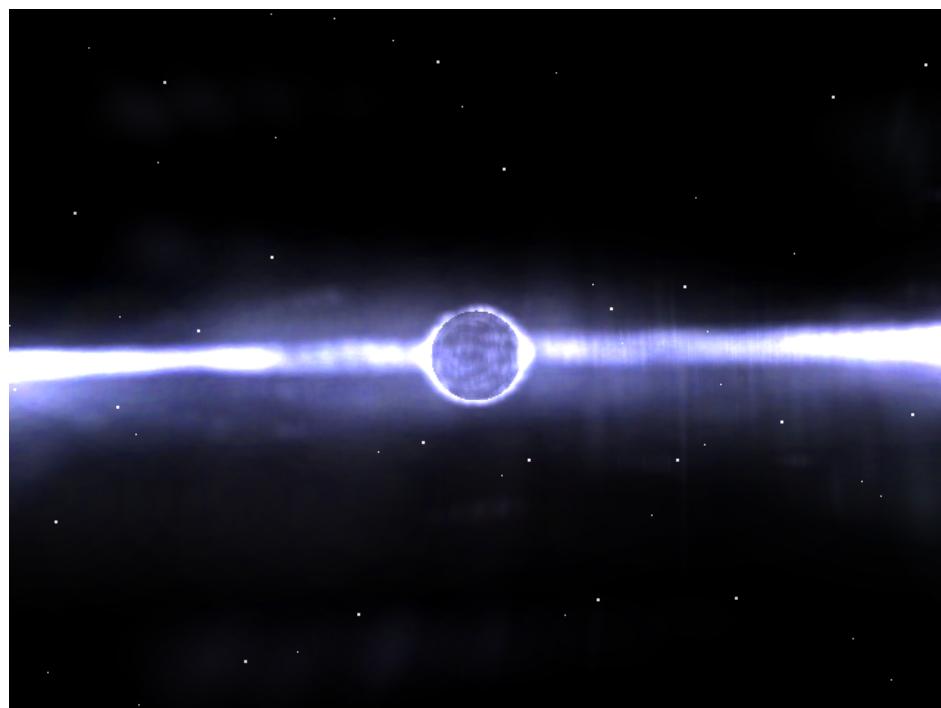


Figura 7.7: Visão interna da simulação proposta.

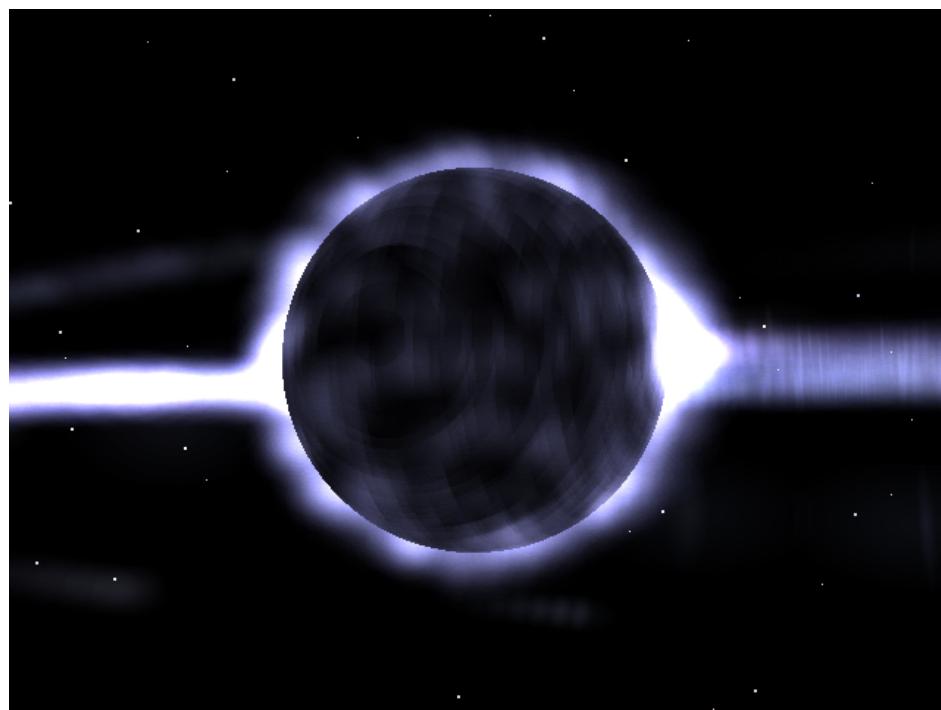


Figura 7.8: Simulação da emissão de radiação pelo Buraco Negro através de um Sistema de Partículas com 1000 partículas.

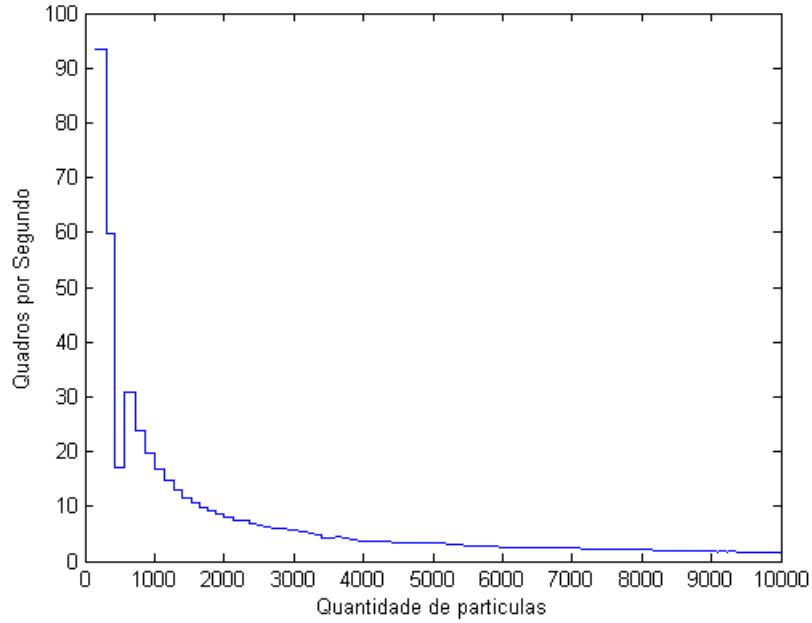


Figura 7.9: Gráfico da relação entre quantidades de partículas e quadros por segundo.

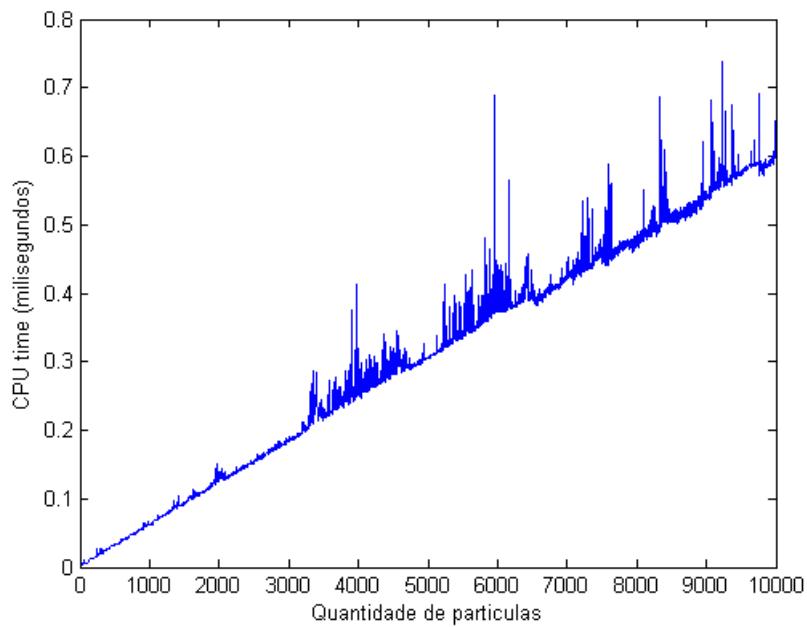


Figura 7.10: Gráfico da relação entre quantidades de partículas e o tempo de CPU demandado.

existentes, os quais apresentam uma grande importância para análise comparativa entre os resultados obtidos e resultados apresentados na literatura.

Um dos primeiros pontos observados está relacionado a área científica de concentração

da simulação: a Computação Gráfica. Esta área da Ciência da Computação, embora tenha uma série de aplicações na simulação de fenômenos astrofísicos, pouco apresenta em relação à utilização específica do método de aproximação SPH para a representação de Buracos Negros, o que tornou necessário buscar conceitos de simulações numéricas de tal fenômeno diretamente na Astrofísica, entre as quais se encontra o modelo utilizado como referência principal para a elaboração da presente proposta de simulação. A partir disso, possíveis comparações do resultado visual obtido tornam-se inviáveis, uma vez que os trabalhos considerados apresentam apenas o comportamento dos Buracos Negros descrito numericamente, o que atenua a busca, nestes modelos de simulação, por resultados bastante próximos da realidade.

Nos modelos de simulação apresentados pela Astrofísica, um dos principais fatores a ser alcançado durante a simulação é a estabilidade dos valores que descrevem o comportamento dos objetos simulados. Para alcançar tal estabilidade são empregados algoritmos que refazem os cálculos dos valores das partículas indefinidamente, o que demanda a utilização de super-computadores executando processos por longos períodos de tempo. Por outro lado, o método de simulação proposto faz o cálculo direto dos valores das variáveis do sistema sem preocupar-se com a obtenção de um estado considerado estável. Esta discrepância entre ambas estratégias de simulação faz emergir possíveis variação entre os resultados obtidos, o que é consideravelmente aceitável, visto que os resultados visuais obtidos com a simulação gráfica não tornam completamente necessária a obtenção de estabilidade do sistema.

Neste sentido, uma boa estratégia de comparação entre os resultados obtidos pela proposta e resultados apresentados na literatura é desenvolver uma análise comparativa através de gráficos de comportamento, isto é, gráficos que apresentem a variação de uma determinada variável em relação a outra. Baseado nisso, torna-se interessante o desenvolvimento de uma comparação entre os resultados obtidos e modelo de simulação de Buracos Negros que serviu como base para a elaboração do sistema. Entretanto, embora o modelo desenvolvido por [Lee and Klužniak 1999] trate da simulação de Buracos Negros, os resultados apresentados pelos cientistas referem-se à simulação de sistemas binários, constituídos de Buracos Negros e Estrelas de Nêutrons, os quais apresentam ligeiras diferenças em determinadas propriedades, principalmente pela presença de um alto fluxo de matéria e energia proveniente da Estrela de Nêutrons, o que torna necessário a comparação da proposta com um modelo mais específico ao problema simulado.

Uma importante referência na simulação de Buracos Negros utilizando SPH, a qual pode ser considerada como uma alternativa para o processo de validação da proposta, foi desenvolvida por um grupo de cientistas italianos, onde foi apresentado um modelo de simulação tridimensional para choques em discos de acresção em torno de Buracos Negros [Gerardi et al. 2005]. Neste modelo de simulação, os fenômenos relacionados aos Buracos Negros que demandam a utilização do SPH para aproximação dos valores de determinadas variáveis apresentam uma estratégia de exploração semelhante a desenvolvida por [Lee and Klužniak 1999]. A principal diferença é que o trabalho apresentado por [Gerardi et al. 2005] acrescenta o tratamento de possíveis choques que ocorram no disco de acresção, além de apresentar uma proposta de paralelização do código SPH, a fim de obter uma maior eficiência na busca pela estabilidade do sistema.

Em seu trabalho, Germani *et al.* apresentam gráficos de comportamento que demonstram relações entre variáveis do sistema em determinados momentos. Entre tais gráficos, os mais significativos para a comparação são os gráficos que apresentam a relação da velocidade radial

e do número Mach em relação ao raio da partícula. A velocidade radial é uma grandeza que descreve a velocidade com que uma partícula se aproxima do centro do Buraco Negro. Por outro lado, o número Mach refere-se à relação entre a velocidade que uma partícula apresenta e a velocidade do som na posição desta partícula, como é apresentado na Equação 7.12, onde v_o é a velocidade do objeto e v_s é a velocidade do som.

$$M_a = \frac{v_o}{v_s} \quad (7.12)$$

A escolha de tais gráficos de comportamento se justifica principalmente pelo fato de que a velocidade apresentada pelas partículas que representam o disco de acresção em torno do Buraco Negro podem ser consideradas como o principal ponto de referência da simulação, uma vez que este valor é responsável direto pela determinação da posição em que a partícula será renderizada. Somando-se a isto, a comparação através do número Mach aumenta ainda mais a legitimidade da comparação, uma vez que este valor é dependente da velocidade do som na posição da partícula, a qual está ligada aos valores de pressão e densidade, calculados via SPH.

Baseado nestas considerações, as Figuras 7.11¹ e 7.12² apresentam os gráficos de comparação entre a proposta e os resultados apresentados por [Gerardi et al. 2005]. No primeiro gráfico é apresentado uma relação entre o número Mach e o raio das n partículas que compõe o sistema, através do qual pode-se observar que o comportamento das partículas do sistema proposto assemelha-se com os resultados de [Gerardi et al. 2005], de modo que quando maior é a distância entre uma partícula e o Buraco Negro, menor é número Mach. Uma descrição análoga pode ser utilizada para o segundo gráfico.

Embora os resultados obtidos com o modelo proposto apresentem alguns ruídos em relação aos resultados do modelo usado como referência na comparação, a essência comportamental das partículas em relação às suas propriedades são mantidas, o que pode ser observado através das curvas de relação entre as propriedades. Além disso, estas variações são consideradas justificáveis, uma vez que o sistema proposto não possui o propósito de alcançar a estabilidade obtida com o modelo de [Gerardi et al. 2005].

Outro fator a ser considerado durante a análise da comparação refere-se ao tipo de máquina em que os sistemas são executados. Enquanto o sistema proposto foi implementado para máquinas de pequeno porte, o modelo referência de comparação foi desenvolvido para ser executado em supercomputadores, o que explica sua melhor adequação à obtenção de um sistema mais estável. De acordo com o descrito por [Gerardi et al. 2005], os resultados apresentados por eles foram obtidos através da execução do método em supercomputadores do laboratório CINECA, o qual possui máquinas que estão na lista das quinhentas mais poderosas do mundo.

Baseado em tais informações, e no fato de que o modelo proposto tem como propósito principal a elaboração de uma simulação gráfica, pode-se concluir que os resultados obtidos utilizando o SPH são considerados relativamente satisfatórios, e garantem uma boa representação do comportamento dos discos de acresção em torno dos Buracos Negros.

²Os gráficos apresentados em [Gerardi et al. 2005] foram normalizados para a mesma faixa de valores da simulação do modelo proposto.

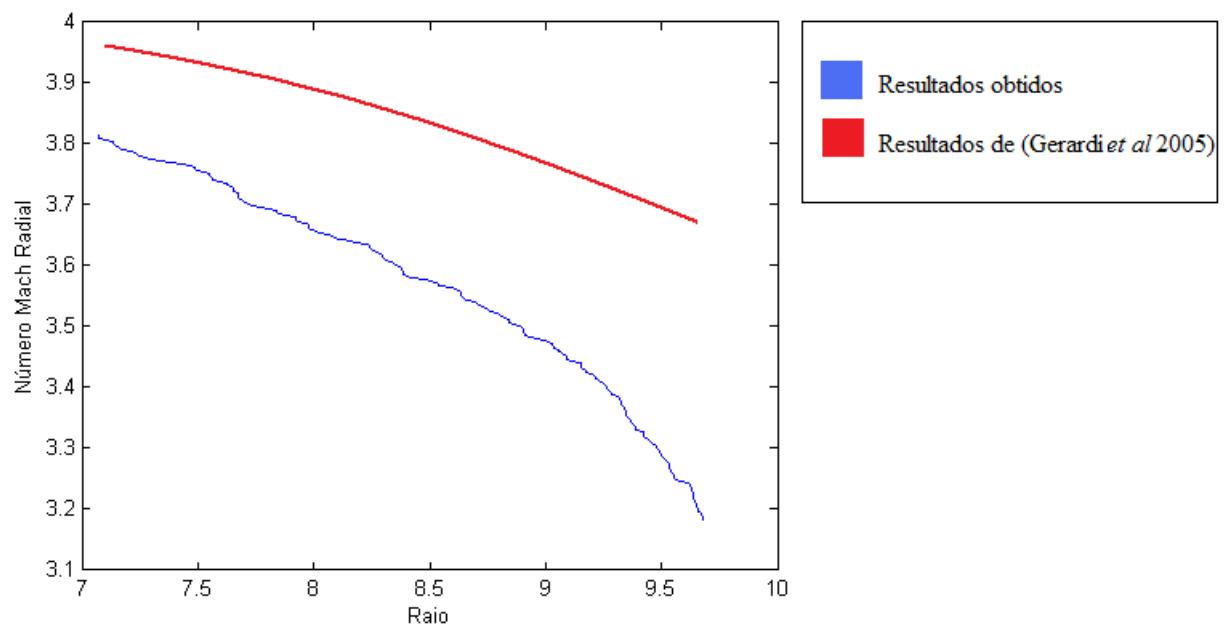


Figura 7.11: Comparação entre os resultados obtidos e os resultados apresentados em [Gerardi et al. 2005] para o número Mach.

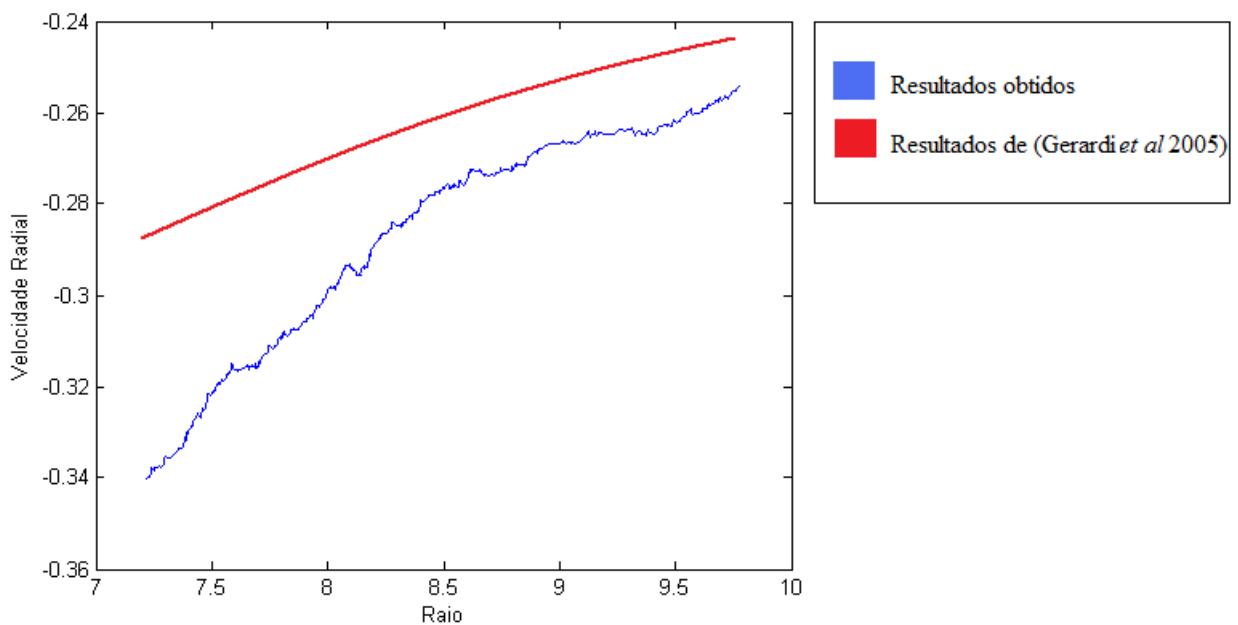


Figura 7.12: Comparação entre os resultados obtidos e os resultados apresentados em [Gerardi et al. 2005] para a velocidade radial.

7.6.1 Dificuldades Encontradas

Embora as comparações mostrem que o sistema tenha alcançado resultados dentro dos padrões esperados, algumas dificuldades foram encontradas durante o processo de concepção deste modelo de simulação, as quais apresentaram grande influência nos resultados finais obtidos. Tais dificuldades estão relacionadas principalmente a dois pontos: a estruturação do sistema e a renderização dos resultados.

Durante a fase de abstração do fenômeno problema, os Buracos Negros, um importante fator deve ser analisado: a estabilidade do sistema. Como pôde ser acompanhado ao longo do texto, ao se aplicar o modelo de aproximação SPH, o sistema, no caso da simulação de fenômenos astrofísicos, demanda uma determinada quantidade de tempo até situar-se em um estado “estável”. Entretanto, na simulação proposta, o disco de acresção, representado através de um Sistema de Partículas, apresenta um comportamento que impõe um certo limite de estabilidade ao sistema. As partículas deste sistema ao alcançarem o horizonte de eventos do Buraco Negro são consumidas e, consequentemente, nascem em uma posição aleatória contida na fronteira externa do disco de acresção. No momento de nascimento, os valores das propriedades da partículas são definidos aleatoriamente, não seguindo os preceitos das equações físicas que regem o comportamento do fenômeno, o que pode ser considerado como uma inserção de partículas instáveis no sistema, fato este que justifica o limite de estabilidade da simulação.

Por outro lado, a renderização dos resultados obtidos também se apresentou como um dos obstáculos da concepção do trabalho. Como descrito na seção anterior, durante a fase de implementação escolheu-se a opção de trabalhar com uma simulação em tempo real, a fim de permitir ao usuário acompanhar o processo de evolução dos discos de acresção ao longo do tempo, assim como a emissão de radiação pelo Buraco Negro. A partir disso, foi necessária a utilização de uma ferramenta de renderização que não oferece resultados com qualidade visual semelhantes aos observados quando se trabalha com mecanismos de renderização *off-line*.

Além destas dificuldades, outro problema encontrado foi a pequena quantidade de referências diretas relacionadas ao tema do trabalho na área de Computação Gráfica, o que impeliu a necessidade de se buscar diretamente na Astrofísica mecanismos bases a serem considerados para a concepção do sistema e restringiu as possibilidades de comparação dos resultados obtidos. Entretanto esta e as dificuldades encontradas anteriormente pode ser exploradas através de estratégias alternativas, as quais serão discutidas no próximo capítulo, no levantamento de possíveis trabalhos futuros.

Algorithm 7.1: Simulação de Buracos Negros

```

for cada partícula  $i$  do disco de acresção do
    Inicializar partícula  $i$  via SPc (Seção 7.4.4)
end for
for cada partícula par de partículas  $i$  do sistema de radiação do
    Inicializar partícula  $i$  via SPV (Seção 7.4.4)
end for
while Sistema ativo do
    for cada partícula  $i$  do disco de acresção do
        Calcular força gravitacional (Equação 7.3)
        Calcular densidade (Equação 7.5)
        Calcular forças hidrodinâmicas (Equação 7.6)
        Atualizar posição da partícula via Equação 7.2 e 7.11
        if  $|posição| < \text{raio do horizonte de eventos}$  then
            Atualizar massa  $M^n$  do Buraco Negro (somando a massa da partícula consumida)
            Extinguir partícula (Seção 7.4.5)
            Gerar nova partícula (Seção 7.4.5)
        end if
    end for
    for cada partícula par de partículas  $i$  do sistema de radiação do
        if tempo de vida ultrapassar limite then
            Extinguir partícula (Seções 7.3.3 e 7.4.5)
            Gerar nova partícula virtual (Seções 7.3.3 e 7.4.5)
        end if
        if  $|posição da partícula| \text{ xor } |posição da anti-partícula| < \text{raio do horizonte de eventos}$  then
            Partícula companheira se torna real (renderizada)*
            Definir novo tempo de vida (Equação 7.10)
            Calcular cor da partícula (Equação 6.2)
            Atualizar massa  $M^n$  do Buraco Negro
        else
            if Partícula se colidir com seu par anti-partícula or  $|posição da partícula| = |posição da anti-partícula| < \text{raio do horizonte de eventos}$  then
                Extinguir par de partícula e anti-partícula (Seções 7.3.3 e 7.4.5)
                Gerar novo par via SPV (Seções 7.3.3 e 7.4.5)
            end if
            Atualizar posição (Equação 7.11)
        end if
    end for
end while

```

* Partícula companheira, neste caso, refere-se ao elemento do par partícula e anti-partícula que não foi consumido pelo Buraco Negro, ou seja, o elemento que possui o módulo de sua posição maior que o raio do horizonte de eventos.

Capítulo 8

Conclusão e Trabalhos Futuros

Esta dissertação apresentou uma proposta de simulação gráfica de Buracos Negros utilizando a técnica de representação de fenômenos *fuzzy* Sistemas de Partículas e o SPH. Através dos capítulos teóricos apresentados foi possível acompanhar os principais conceitos destas duas teorias e, além disso, compreender a teoria que descreve os Buracos Negros, para então, finalmente, desenvolver uma descrição detalhada do sistema de simulação, através de uma exploração dos conceitos matemáticos, físicos e computacionais utilizados.

Os resultados obtidos através desta proposta de simulação apresentaram o comportamento dos Buracos Negros de uma forma satisfatória, fato que pode ser concluído tanto através dos gráficos comparativos da aplicação do método SPH, apresentados na Seção 7.6, quanto pela próprios resultados visuais alcançados. Entretanto, é importante observar que alguns pontos da proposta podem ser alterados e aperfeiçoados a fim de melhorar, principalmente, a qualidade visual, em relação ao realismo apetecido, o custo computacional e a estabilidade do sistema, revelando assim a abertura para possíveis trabalhos futuros.

O primeiro possível ponto de aperfeiçoamento do trabalho está na renderização dos resultados obtidos. Como descrito no Capítulo 7, a simulação apresentada foi implementada utilizando a API OpenGL, a qual embora seja bastante robusta, não permite a geração de imagens comparáveis às obtidas com ferramentas que trabalham com algoritmos complexos de renderização, como é o caso do Pov-Ray. Neste sentido, um possível aperfeiçoamento é conceber a simulação com tais ferramentas de renderização, permitindo ao modelo de simulação proposto o alcance de uma maior qualidade de realismo nos resultados obtidos.

Um segundo possível ponto a ser explorado está relacionado a estabilidade apresentada pela simulação do disco de acresção através do método SPH. Durante a simulação deste, partículas são geradas a todo o momento em posições aleatórias contidas no seu limiar externo. Neste processo de geração, tais partículas recebem valores em suas variáveis que inicialmente independem dos cálculos SPH, o que gera uma inserção constante de instabilidade no sistema, definindo um limite sobre a estabilidade geral da simulação. Uma possível proposta para solucionar tal problema seria a geração das partículas utilizadas na simulação em espaço profundo, desta forma, quando estas alcançarem a área do disco de acresção já terão seus valores estabilizados.

Entretanto, é importante observar que tal estratégia pode tornar necessária a utilização de uma quantidade consideravelmente maior de partículas durante a simulação.

Finalmente, entre os possíveis trabalhos futuros se destaca um aperfeiçoamento na escalabilidade do sistema. Neste sentido, um dos principais problemas observados está em relação a busca de vizinhança durante a aplicação do método SPH, que pode ser considerada como o ponto chave de influência no custo computacional da simulação, uma vez que na presente implementação não houve a preocupação em utilizar métodos de busca de baixo custo computacional. Desta forma, através da aplicação de processos e estruturas mais eficientes pode-se melhorar consideravelmente a escalabilidade da simulação.

Apesar destes pontos em aberto, a simulação apresentou resultados dentro dos esperados e se mostrou suficientemente adequada para ser aplicada em animações que envolvam os Buracos Negros, tornando possível, inclusive, a interação deste fenômeno com outros objetos. A partir disso, espera-se que este trabalho tenha contribuído para o alargamento das fronteiras de aplicação da Computação Gráfica para a simulação de fenômenos astrofísicos, algo ainda bastante restrito nesta área da Ciência da Computação.

Referências Bibliográficas

- [Anderson 1995] Anderson, J. D. (1995). *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill.
- [Azevedo and Conci 2003] Azevedo, E. and Conci, A. (2003). *Computação Gráfica - Teoria e Prática*. Editora Campus, Rio de Janeiro.
- [Baranoski et al. 2000] Baranoski, G. V. G., Shirley, P., Rokne, J. G., Trondsen, T., and Bastos, R. (2000). Simulating the Aurora Borealis. In *PG '00: Proceedings of the 8th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, page 2, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- [Beiser 2002] Beiser, A. (2002). *Concepts of Modern Physics*. McGraw Hill, 6 edition.
- [Bekenstein 1973] Bekenstein, J. D. (1973). Black Holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, 7(8):2333–2346.
- [Benz and Asphaug 1994] Benz, W. and Asphaug, E. (1994). Impact simulations with fracture: I. Method and tests. *Icarus*, 107:98–116.
- [Benz and Asphaug 1995] Benz, W. and Asphaug, E. (1995). Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. *Comput. Phys. Commun.*, 87:253–265.
- [Blinn 1982] Blinn, J. F. (1982). Light reflection functions for simulation of clouds and dusty surfaces. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 16(3):21–29.
- [Bruesch and Asphaug 2002] Bruesch, L. and Asphaug, E. (2002). Rock-Mechanical Constraints on SPH Applications to Asteroid Impact Evolution. *AGU Fall Meeting Abstracts*, pages A433+.
- [Cai et al. 2008] Cai, X., Li, J., Yang, J., and Su, Z. (2008). Advanced GPU-based state-preserving particle system. *Intelligent Control and Automation, 2008. WCICA 2008. 7th World Congress on*, pages 4236–4240.
- [Castiñeiras et al. 2006] Castiñeiras, J., Crispino, L. C. B., Matsas, G. E. A., and Vanzella, D. A. T. (2006). O Retrato do Monstrengo. *Scientific American Brasil - Especial Gênios da Ciência Stephen Hawking*, pages 32–39.

- [Chandrasekhar 1935] Chandrasekhar, S. (1935). The highly collapsed configurations of a stellar mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 95:207–225.
- [Chandrasekhar 1995] Chandrasekhar, S. (1995). *Newton's Principia for the Common Reader*. Oxford: Clarendon.
- [Chapra and Canale 1988] Chapra, C. and Canale, R. P. (1988). *Numerical Methods for Engineers*. MacGraw-Hill International.
- [Chen et al. 1999] Chen, J., Wegman, E., Fu, X., and Yang, Y. (1999). Near real-time simulation of particle systems. *Distributed Interactive Simulation and Real-Time Applications, 1999. Proceedings. 3rd IEEE International Workshop on*, pages 33–40.
- [Clavet et al. 2005] Clavet, S., Beaudoin, P., and Poulin, P. (2005). Particle-based Viscoelastic Fluid Simulation. In *Symposium on Computer Animation 2005*, pages 219–228.
- [Cleary and Monaghan 1999] Cleary, P. W. and Monaghan, J. J. (1999). Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 148:227–264.
- [Desbrun and Cani 1996] Desbrun, M. and Cani, M. P. (1996). Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. *Computer Animation and Simulation '96 (Proceedings of EG Workshop on Animation and Simulation)*, pages 61–76.
- [Dilts 1999] Dilts, G. A. (1999). Moving least squares hydrodynamics: consistency and stability. *Int. J. Numer. Methods*, 44:1115–1155.
- [Einstein and Infeld 1980] Einstein, A. and Infeld, L. (1980). *A Evolução da Física*. Zahar Editora, Rio de Janeiro.
- [Flebbe et al. 1994] Flebbe, O., Münzel, S., Herold, H., Riffert, H., and Ruder, H. (1994). Smoothed particle hydrodynamics: physical viscosity and the simulation of accretion disks. *The Astrophysical Journal*, (431):754–760.
- [Foley et al. 1990] Foley, J. D., Dam, A. v., Feiner, S. K., and Hughes, J. F. (1990). *Computer Graphics - Principles and Practice*. The Systems Programming Series. Addison-Wesley Publishing Company, Boston-MA, 2 in c edition.
- [Foster and Metaxas 1996] Foster, N. and Metaxas, D. (1996). Realistic animation of liquids. *Graphical Models and Image Processing*, 58(5):471–483.
- [Fournier et al. 1982] Fournier, A., Fussell, D., and Carpenter, L. (1982). Computer rendering of stochastic models. *Commun. ACM*, 25(6):371–384.
- [Gerardi et al. 2005] Gerardi, G., Molteni, D., and Teresi, V. (2005). 3D SPH Simulations of Shocks in Accretion Flows around black holes. *ArXiv Astrophysics e-prints*.
- [Gingold and Monaghan 1977] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 181:375–389.

- [Gingold and Monaghan 1978] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1978). Binary fission in damped rotating polytropes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 184:481–499.
- [Giugno 2001] Giugno, D. (2001). Buracos Negros e Termodinâmica. Master's thesis, Instituto de Física - Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [Gois et al. 2008] Gois, J. a. P., Nakano, A., Nonato, L. G., and Buscaglia, G. C. (2008). Front tracking with moving-least-squares surfaces. *J. Comput. Phys.*, 227(22):9643–9669.
- [Gomes and Velho 2003] Gomes, J. and Velho, L. (2003). *Fundamentos de Computação Gráfica*. Série de Computação e Matemática. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro, 1 edition.
- [Greiner et al. 2008] Greiner, W., Neise, L., and Stöcker, H. (2008). *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer.
- [Hawking 1975] Hawking, S. W. (1975). Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220.
- [Hawking 1988] Hawking, S. W. (1988). *A Brief History of Time: From the Big Bang to Black Holes*.
- [Hawking 2001] Hawking, S. W. (2001). *The Universe in a Nutshell*.
- [Hayasaki et al. 2008] Hayasaki, K., Mineshige, S., and Ho, L. C. (2008). A Supermassive Binary Black Hole with Triple Disks. *Astr. Journal*, 682:1134–1140.
- [Henyey and Greenstein 1941] Henyey, L. and Greenstein, J. (1941). Diffuse reflection in the galaxy. *Astrophys. Journal*, 93:70–87.
- [Hirsch 1988] Hirsch, C. (1988). *Numerical Computation of Internal and External Flows: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons.
- [Hoover et al. 2004] Hoover, W. G., Hoover, C. C., and Merritt, E. C. (2004). Smooth particle applied mechanics: conservation of angular momentum with tensile stability and velocity averaging. *Phys. Rev. E*, 69.
- [Ichikawa et al. 1993] Ichikawa, S., Hirose, M., and Osaki, Y. (1993). Superoutburst and superhump phenomena in SU Ursae Majoris stars - Enhanced mass-transfer episode or pure disk phenomenon? *PASJ: Publications of the Astronomical Society of Japan*, 45(2):243–253.
- [Ilmonen and Kontkanen 2003] Ilmonen, T. and Kontkanen, J. (2003). The second order particle system. *Journal of Winter School on Computer Graphics (WSCG2003)*, 11:240–247.
- [KCET and Carl Sagan 1980] KCET and Carl Sagan, P. (1980). Cosmos: A Personal Voyage. (Television series).

- [Kobayashi et al. 2004] Kobayashi, S., Laguna, P., Phinney, E. S., and Mészáros, P. (2004). Gravitational Waves and X-Ray Signals from Stellar Disruption by a Massive Black Hole. *Ast. Journal*, 615:855–865.
- [Laguna et al. 1993] Laguna, P., Miller, W. A., and Zurek, W. H. (1993). Smoothed Particle Hydrodynamics Near a Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 404:678–685.
- [Lanzafame et al. 1998] Lanzafame, G., Molteni, D., and Chakrabarti, S. K. (1998). Smoothed particle hydrodynamics simulations of viscous accretion discs around black holes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 299:799–804.
- [Laplace 1795] Laplace, P. S. (1795). *Le Système du Monde*, volume II. Paris.
- [Lee and Klužniak 1999] Lee, W. H. and Klužniak, W. (1999). Newtonian Hydrodynamics of the Coalescence of Black Holes with Neutrons Stars I: Tidally locked binaries with a stiff equation of state. *The Astrophysical Journal*, 526:178–199.
- [Leithold 1986] Leithold, L. (1986). *O Cálculo com Geometria Analítica*. Harbra, São Paulo, 2 edition.
- [Liu and Liu 2003] Liu, G. R. and Liu, M. B. (2003). Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method. *World Scientific Publishing*.
- [Lubow 1992] Lubow, S. H. (1992). Tidally driven inclination instability in Keplerian disks. *Astrophysical Journal*, 398(2):525–530.
- [Lucy 1977] Lucy, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astron. Journal*, 82:1013–1024.
- [Maller et al. 2006] Maller, A. H., Katz, N., Kereš, D., Davé, R., and Weinberg, D. H. (2006). Galaxy Merger Statistics and Inferred Bulge-to-Disk Ratios in Cosmological SPH Simulations. *Astrophysics Journal*, 647:763–772.
- [Müller et al. 2003a] Müller, M., Charypar, D., and Gross, M. (2003a). Particle-based fluid simulation for interactive applications. *SCA '03: Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pages 154–159.
- [Müller et al. 2003b] Müller, M., Schirm, S., and Teschner, M. (2003b). Interactive blood simulation for virtual surgery based on Smoothed Particle Hydrodynamics.
- [Monaghan 1997] Monaghan, J. J. (1997). SPH and Riemann Solvers. *J. Comput. Phys.*, 136:298–307.
- [Monaghan 2005] Monaghan, J. J. (2005). Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 68:1703–1759.
- [Monaghan et al. 2005] Monaghan, J. J., Huppert, H. E., and Worster, M. G. (2005). Solidification using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 206:684–705.

- [Monaghan and Lattanzio 1985] Monaghan, J. J. and Lattanzio, J. C. (1985). A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149:135–143.
- [Monaghan and Price 2004] Monaghan, J. J. and Price, D. J. (2004). Toy stars in one dimension. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, (350):1449–1456.
- [Nagamine et al. 2008] Nagamine, K., Ouchi, M., Springel, V., and Hernquist, L. (2008). Lyman-alpha Emitters and Lyman-break Galaxies at $z=3\text{--}6$ in Cosmological SPH Simulations. *ArXiv e-prints*.
- [Oppenheimer and Volkoff 1939] Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, 55(4):374–381.
- [Paiva 2007] Paiva, A. (2007). *Uma Abordagem Lagrangeana para Simulação de Escoamentos Fluidos Viscoplásticos e Multifásicos*. Tese (doutorado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- [Paiva et al. 2006] Paiva, A., Petronetto, F., Lewiner, T., and Tavares, G. (2006). Particle-based non-Newtonian fluid animation for melting objects. *Computer Graphics and Image Processing, 2006. SIBGRAPI '06. 19th Brazilian Symposium on*, pages 78–85.
- [Paramount 1982] Paramount (1982). Star Trek II: The Wrath of Khan. (film).
- [Parzen 1962] Parzen, E. (1962). On estimations of a probability density and mode. *Ann. Math. Stat.*, 33:1065–1076.
- [Potmesil and Chakravarty 1983] Potmesil, M. and Chakravarty, I. (1983). Modeling motion blur in computer-generated images. In *SIGGRAPH '83: Proceedings of the 10th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 389–399, New York, NY, USA. ACM.
- [Queiroz 2008] Queiroz, T. E. (2008). *Animação computacional de escoamento de fluidos utilizando o método SPH*. Dissertação (mestrado), Universidade de São Paulo - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos.
- [Reeves 1983] Reeves, W. T. (1983). Particle Systems: a Technique for Modeling a Class of Fuzzy Objects. *ACM Trans. Graph.*, 2(2):91–108.
- [Rosenblatt 1956] Rosenblatt, M. (1956). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Stat.*, 27:832–837.
- [Rosenthal et al. 2007] Rosenthal, P., Rosswog, S., and Lisen, L. (2007). Direct Surface Extraction from Smoothed Particle Hydrodynamics Simulation Data. *Proceedings of the 4th High-End Visualization Workshop*.
- [Rosmorduc 1985] Rosmorduc, J. (1985). *Uma História da Física e da Química - De Tales a Einstein*. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro.

- [Rosswog et al. 2008] Rosswog, S., Ramirez-Ruiz, E., Hix, W. R., and Dan, M. (2008). Simulating black hole with dwarf encounters. *Computer Physics Communications*, 179:184–189.
- [Schoenberg 1946] Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions: part A. *Q. Appl. Math.*, (IV):45–99.
- [Stamatellos et al. 2007] Stamatellos, D., Whitworth, A. P., Bisbas, T., and Goodwin, S. (2007). Radiative transfer and the energy equation in SPH simulations of star formation. *AAP*, 475:37–49.
- [Tolman 1939] Tolman, R. C. (1939). Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Phys. Rev.*, 55(4):364–373.
- [Whitehurst 1989] Whitehurst, R. (1989). In: *Theory of Accretion Discs*. ed. F. Meyer, W. J. Duschl, J. Frank, E. Meyer-Hofmeister (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers).
- [Whitted 1980] Whitted, T. (1980). An improved illumination model for shaded display. *Commun. ACM*, 23(6):343–349.
- [Zhou et al. 2006] Zhou, S., Sun, Y., Lu, L., and Chen, Z. (2006). Fire Simulation Model Based on Particle System and Its Application in Virtual Reality. In *ICAT '06: Proceedings of the 16th International Conference on Artificial Reality and Telexistence-Workshops*, pages 642–645, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.