

Ibrahima Hanifan Dieng & Amadou Madior Dieng

*PERSPECTIVES POUR LA
CONVOLUTION D'ÉNERGIE ET
DESTRUCTION DES SINGULARITES
AVEC LES CELERITES*

Convolutions d'énergies et destructions de singularités des célérités

Comment les célérités relativistes sont en interactions avec les autres propriétés habituelles ?

Introduction

Dans le cadre de la relativité, on observe que les comportements de l'énergie et de la structure de l'espace-temps se complexifient lorsque l'on considère des vitesses proches de celle de la lumière. Voici une petite introduction aux idées de convolutions d'énergies et à la destruction de singularités, ainsi qu'à l'interaction entre les célérités relativistes et les propriétés classiques.

Les singularités, telles que celles prédites par la relativité générale dans le centre des trous noirs ou au moment du Big Bang, sont des points où les lois physiques classiques peuvent cesser. Cependant, plusieurs théories modernes, qu'elles soient basées sur des approches quantiques ou des modèles de gravitation modifiés, suggèrent que ces singularités pourraient en réalité être « **détruites** » ou régularisées par des mécanismes physiques. L'idée est que, dans des conditions extrêmes, la convolution d'énergies peut « lisser » ces points de discontinuité, remplaçant l'infini mathématique par une zone de très haute densité où de nouvelles lois de la physique pourraient prendre le relais. Et aussi quel est leur comportement avec l'habituel ?



Interactions entre célérités relativistes et propriétés usuelles

Lorsque des objets ou des particules se déplacent à des célérités relativistes (c'est-à-dire à des vitesses proches de celle de la lumière), et même supposés à des vitesses multiples de la lumière, mathématiquement, les propriétés classiques telles que la masse, le temps et l'espace subissent d'importantes transformations. Les effets de dilatation du temps et de contraction des longueurs, imposés par la transformation de Lorentz, modifient la manière dont ces entités interagissent.

Concernant **la Modification de la dynamique énergétique**, L'augmentation de l'énergie cinétique à haute vitesse pourrait, par exemple, mathématiquement conduire à des effets non linéaires dans la propagation de l'énergie dans l'espace-temps.

Répercussions sur la structure de l'espace-temps ?

Ces effets relativistes interagissent avec la géométrie de l'espace-temps, rendant compte de phénomènes comme le décalage gravitationnel et modifiant potentiellement la formation ou l'élimination de singularités.

En résumé, l'étude des convolutions d'énergies et de la destruction de singularités dans un cadre relativiste ouvre la voie à une meilleure compréhension des phénomènes extrêmes. Elle montre comment, en dépit des lois classiques, la dynamique à très haute énergie et à grande célérité peut conduire à des régimes où la structure fondamentale de l'espace-temps se transforme, pouvant ainsi offrir de nouvelles perspectives sur la gravitation et la cosmologie (possibilité).

Nous allons lancer notre étude dans le cadre spatio-temporel.

Soit 2 évènements dans l'espace-temps (t, x, y, z)

$E1(t_1, x_1, y_1, z_1)$ et $E2(t_2, x_2, y_2, z_2)$

$$c^2 \Delta \tau^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

$\Delta \tau$ est l'intervalle de temps dans l'espace ;

$$c^2 \Delta \tau^2 = c^2 (\Delta t)^2 - \Delta s^2$$

Δs^2 est l'écart de distance spatial

$(\Delta t)^2$ est la distance temporelle

Si $c^2 (\Delta t)^2 - \Delta s^2 = 0$ on aura une invariance spatio- temporelle, alors

$$c^2 (\Delta t)^2 - \Delta s^2 = 0 \Rightarrow c^2 \Delta \tau^2 = 0 = c^2 (\Delta t)^2 - v^2 \Delta t^2$$

Ici on remplace $v(\Delta t)^2$ par la distance spatiale

$$\text{Alors } \Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \Leftrightarrow \cong \gamma \Delta \tau \quad \text{on decouvre le facteur de lorentz } \gamma.$$

les **transformations de Lorentz** deviennent alors **des rotations hyperboliques** dans l'espace-temps de **Minkowski** (au lieu de rotations circulaires en géométrie euclidienne).

$$\theta = \operatorname{arctanh}(v/c)$$

$$\beta = (v/c)$$

$$\gamma = \cosh(\theta)$$

Interprétation géométrique : Rotations hyperboliques

Les transformations de Lorentz admettent une élégante interprétation géométrique comme rotations hyperboliques dans l'espace-temps de Minkowski. Cette analogie avec les rotations circulaires de la géométrie euclidienne s'exprime via la rapidité θ :

$$\theta = \operatorname{arctanh} \left(\frac{v}{c} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)$$

En notant $\beta = \frac{v}{c}$, on obtient les relations :

$$\gamma = \cosh(\theta), \beta\gamma = \sinh(\theta), \beta = \tanh(\theta)$$

Les transformations de Lorentz prennent alors la forme d'une matrice de rotation hyperbolique :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

À basse vitesse ($v \ll c$) :

Le facteur $\gamma \approx 1$ et $\theta \approx \beta$, on retrouve la mécanique newtonienne avec une excellente approximation. Les effets relativistes sont négligeables dans les cas usuels.

À haute vitesse ($v \rightarrow c$) :

Le facteur γ diverge, entraînant des phénomènes contre-intuitifs :

Dilatation temporelle extrême , Contraction des longueurs prononcée ?

Au-delà de c ?

Les particules supraluminiques (**tachyons**) restent hypothétiques. Leur description mathématique nécessiterait un temps propre imaginaire ($\Delta\tau$ **imaginaire**) et un facteur γ imaginaire, ce qui soulève des paradoxes causaux sérieux.

A des vitesses non relativistes simples, on néglige ces effets . Que se passe-t-il dans des vitesses inexplicables ?

Pour une particule de masse au repos :

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

Faisons un développement en série entière :

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} \frac{m_0 v^4}{c^2} + \dots + \frac{m_0 c^2 (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{v^{2n}}{c^{2n}}$$

$$m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2 + \dots + \frac{m_0 c^2 (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \beta^{2n}$$

Fonction énergie relativiste : développement analytique, convolution et théorèmes de régularisation.

Développement en série de Taylor de l'énergie relativiste

Expression fondamentale

L'énergie totale relativiste d'une particule de masse au repos m_0 est donnée par :

$$E(v) = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ avec $\beta = v/c$.

Développement en série

Pour $|\beta| < 1$ (c'est-à-dire $v < c$), on peut développer $\gamma(\beta)$ en série binomiale :

$$\gamma(\beta) = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-\beta^2)^n$$

Avec $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}$, on obtient :

$$\gamma(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \beta^{2n}$$

Donc :

$$E(\beta) = m_0 c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \beta^{2n}$$

Rayon de convergence

Ce développement converge absolument pour $|\beta| < 1$ et diverge pour $|\beta| > 1$. Le rayon de convergence $R = 1$ correspond physiquement à la vitesse de la lumière c .

Analyse complexe : holomorphie et singularités

Extension dans le plan complexe

Considérons la fonction complexe :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \text{ où } z = \beta \in \mathbb{C}$$

Cette fonction est **holomorphe** (dérivable complexe) dans le disque ouvert $|z| < 1$. Elle est **analytique** dans ce disque, ce qui signifie qu'elle coïncide avec sa série de Taylor autour de l'origine.

Points de branchement et coupures

Les points $z = \pm 1$ sont des **points de branchement** pour $f(z)$. Pour définir une fonction holomorphe unique, on doit choisir :

Une **détermination principale**

Un **domaine simplement connexe** évitant les points de branchement

Typiquement, on place une coupure le long de l'axe réel pour $|x| \geq 1$.

Comportement pour $v \gg c$ ($|z| > 1$)

Pour $|z| > 1$, la série de Taylor ne converge plus. La fonction présente alors un comportement différent :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pm i}{\sqrt{z^2-1}}$$

Cette expression implique :

Valeurs imaginaires pures pour z réel avec $|z| > 1$

Une **interprétation physique problématique** : énergie complexe

Limitations physiques : cela correspond au domaine des tachyons (particules hypothétiques supraluminiques)

Convolution des séries de Taylor

Produit de Cauchy des séries

Soient deux fonctions analytiques :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Leur produit s'exprime comme :

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Cette formule définit la **convolution discrète** des coefficients.

La convolution des coefficients modélise comment deux processus physiques s'influencent mutuellement :

Combinaison d'effets indépendants : Si a_n et b_n représentent des amplitudes de probabilité à différents ordres, c_n représente l'amplitude totale pour que les deux processus contribuent conjointement à l'ordre n .

Propagation dans l'espace-temps : En physique des champs, la convolution correspond souvent à l'intégration sur des degrés de liberté internes ou à la composition d'opérateurs.

Exemple en théorie des perturbations : En mécanique quantique, le développement perturbatif d'une observable s'écrit comme une série de puissances d'un paramètre de couplage. Le produit de deux observables conduit à une convolution de leurs coefficients.

Application à l'énergie relativiste

Supposons que l'énergie totale résulte de la combinaison de deux effets physiques :

Effet cinétique relativiste : $f(\beta) = \gamma(\beta)$

Effet de correction quantique : $g(\beta) = \sum b_n \beta^{2n}$

L'énergie effective serait :

$$E_{\text{eff}}(\beta) = m_0 c^2 \cdot f(\beta) \cdot g(\beta)$$

Les coefficients c_n mélangent les contributions relativistes et quantiques.

Théorèmes de Hadamard et régularisation des singularités

Théorème de Hadamard sur le produit de Cauchy

Énoncé : Soient $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ avec rayons de convergence R_f et R_g . Alors le rayon de convergence R de la série produit vérifie :

$$R \geq \min(R_f, R_g)$$

De plus, toute singularité de $f(z)g(z)$ sur le cercle $|z| = R$ doit être une singularité de $f(z)$ ou de $g(z)$, à moins qu'elle ne soit annulée par un zéro.

Mécanismes de "destruction" de singularités

Compensation pôle-zéro

Si $f(z)$ a un pôle d'ordre m en z_0 et $g(z)$ un zéro d'ordre m au même point, alors $f(z)g(z)$ est holomorphe en z_0 .

Exemple :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^m}, \quad g(z) = (1-z)^m \Rightarrow f(z)g(z) = 1$$

Atténuation par convolution

La convolution des coefficients peut **réduire la croissance** des $|c_n|$ comparée aux $|a_n|$ et $|b_n|$.
Si $\limsup |a_n|^{1/n} = 1/R_f$ et $\limsup |b_n|^{1/n} = 1/R_g$, alors :

$$\limsup |c_n|^{1/n} \leq \frac{1}{\min(R_f, R_g)}$$

mais cette inégalité peut être stricte si les séries se compensent.

Transformation intégrale

Certaines transformations (comme la transformée de Laplace ou de Fourier) peuvent régulariser des singularités en les "étalant" :

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Si $f(t)$ a une singularité en t_0 , sa transformée de Laplace peut être holomorphe dans un demi-plan.

Application aux singularités en relativité générale

Cas des singularités de trous noirs

En relativité générale, la métrique de **Schwarzschild** présente une singularité en $r = 0$.

Cependant :

Approches quantiques : La gravité quantique à boucles prédit que l'opérateur d'aire a un spectre discret, empêchant r de devenir nul.

Effets de matière : L'équation d'état de la matière à haute densité pourrait modifier le comportement géométrique.

Convolution avec les fluctuations quantiques : Si on représente la métrique effective comme un produit de convolution entre la métrique classique et un noyau quantique, la singularité pourrait être régularisée.

Modélisation mathématique exemplaire

Supposons que la courbure scalaire $R(r)$ de la métrique classique diverge comme $1/r^3$ près de $r = 0$. Une correction quantique pourrait introduire un facteur $g(r) = r^3/(r^3 + \ell_p^3)$ où ℓ_p est la longueur de Planck. Alors :

$$R_{\text{eff}}(r) = R(r) \cdot g(r) = \frac{C}{r^3} \cdot \frac{r^3}{r^3 + \ell_p^3} = \frac{C}{r^3 + \ell_p^3}$$

qui reste finie en $r = 0$.

Implications physiques profondes(Limite classique vs régime quantique)

La convolution mathématique modélise la transition entre :

Description Classique (singularités, déterminisme)

Description quantique (régularité, probabilités)

Une Émergence de nouvelles échelles

Les théorèmes de Hadamard suggèrent que l'introduction d'une **échelle fondamentale** (comme la longueur de Planck) peut : **Tronquer les séries divergentes, Changer la nature des singularités, Rendre finies les quantités physiques.**

Nous pourrions penser aller Vers une théorie unifiée et dans ce cas La régularisation des singularités par convolution opère comme un pont entre : **La Relativité générale** (espace-temps continu mais singulier), et la **Théorie quantique** .Alors la convolution est Comme outil d'unification

Le développement analytique de l'énergie relativiste révèle une frontière naturelle à $v = c$. L'étude des propriétés d'holomorphic montre que cette limite n'est pas franchissable dans le cadre standard. Cependant, les opérations de convolution et les théorèmes de régularisation offrent des mécanismes mathématiques pour :

Combiner des descriptions physiques différentes

Atténuer ou éliminer des singularités

Étendre la validité des théories au-delà de leurs domaines initiaux

Ces outils mathématiques inspirent des approches modernes en gravité quantique, où la "convolution" entre effets géométriques classiques et fluctuations quantiques pourrait mener à une description régulière de l'univers aux échelles les plus fondamentales, éliminant ainsi les singularités prédites par la relativité générale classique.

Voici la fonction énergie relativiste développée en série entière de Taylor. nous allons l'associer à des concepts d'analyse complexe comme l'holomorphic, les disques de convergence, et les fonctions analytiques.

Que se passe-t-il pour cette fonction énergétique si $v \gg c$?

si la fonction est holomorphic et analytique dans un disque ouvert $|z - z_0| < R$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Le produit des deux $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Leur produit s'exprime comme :

$$h(z) = f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

où les coefficients c_n sont donnés par la convolution discrète :

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Combinaison d'Effets Physiques

La convolution modélise comment deux processus physiques interagissent :

Si a_n et b_n représentent des amplitudes à différents ordres

Alors c_n représente l'amplitude totale combinant les deux processus

Exemple en Théorie des Perturbations

En mécanique quantique, considérons :

$f(\mathbf{z})$: série perturbative d'un Hamiltonien H_0

$g(\mathbf{z})$: série perturbative d'une interaction V

Le produit $f(\mathbf{z})g(\mathbf{z})$ représente la combinaison des deux effets, et la convolution c_n mélange les contributions d'ordres différents.

Propagation dans l'Espace-Temps

Dans une perspective spatio-temporelle, la convolution peut représenter :

Superposition d'effets : Comment un phénomène à un instant t_1 influence un autre à l'instant t_2

Propagation d'information : Comment une perturbation se propage à travers différents milieux

Application à l'Énergie Relativiste

Supposons que l'énergie totale résulte de :

Effet cinétique relativiste : $f(\beta) = \gamma(\beta)$

Correction quantique : $g(\beta) = \sum b_n \beta^{2n}$

L'énergie effective serait :

$$E_{\text{eff}}(\beta) = m_0 c^2 \cdot f(\beta) \cdot g(\beta)$$

Les coefficients c_n mélangent les contributions relativistes et quantiques, modélisant leur interaction mutuelle.

Interprétation Physique Profonde : Comment un Phénomène en Influence un Autre.

Modélisation de l'Interaction

La convolution $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ peut se lire comme :

"La contribution totale d'ordre n résulte de toutes les combinaisons où :

Le premier phénomène contribue à l'ordre k

Le second phénomène contribue à l'ordre complémentaire $n - k$ "

Exemple Concret : Diffusion de Particules

Considérons une particule subissant :

Diffusion élastique (série a_n)

Diffusion inélastique (série b_n)

La section efficace totale sera proportionnelle à $\sum c_n$, où chaque c_n combine les probabilités des deux types de diffusion à différents ordres.

Transition Entre Régimes Physiques

La convolution permet de décrire des transitions :

Régime Classique → **régime relativiste**

Régime continu → **régime quantique**

Si on tentait d'étendre cette approche à $v > c$, on rencontrerait :

Divergence des séries f et g

Problèmes de **causalité** dans l'interprétation de la **convolution**

Nécessité d'une nouvelle physique au-delà de la **relativité restreinte**

Le formalisme des séries entières et de leur convolution fournit un cadre mathématique puissant pour : Comprendre comment différentes contributions physiques s'assemblent, ensuite analyser les régimes de validité des développements perturbatifs et Identifier les limites des théories physiques (comme $v = c$ pour la relativité restreinte)

La convolution des coefficients n'est pas seulement une opération algébrique, mais représente l'essence même de l'interaction : comment l'effet d'un phénomène, filtré et transformé, peut en influencer un autre à travers l'espace et le temps.

Cette perspective unifiée montre comment l'analyse complexe et l'algèbre des séries peuvent éclairer des problèmes profonds de physique théorique, des fondements de la relativité aux frontières de la gravitation quantique.

Où les coefficients sont obtenus par convolution des coefficients

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ la convolution de ces coefficients dans la multiplication des séries de Taylor a une interprétation physique importante : elle peut représenter comment 2 processus influent un même phénomène lorsqu'ils sont combinés. Comment l'effet d'un phénomène à travers un autre dans le temps et dans l'espace peut affecter un autre ?

Le but des théorèmes de **Hadamard** est de montrer que sous certaines opérations (comme la convolution, ou des transformations intégrales ou différentielles), les **singularités** d'une fonction peuvent être "atténuées", "masquées", voire complètement "supprimées".

Elle peut être développée autour du point z_0 :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$$

z_0 est le centre de la série

$f^{(n)}(z_0)$ dérivée nième successive évaluée en z_0 .

R : le rayon de convergence déterminé par la distance au point singulier le plus proche de z_0 .

Si $v \geq c$

La singularité est β tel que $v=c$.

Si $v \ll c$??

Si $v=0$ au repos

$$E_0 = m_0 c^2$$

$$E = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_0 c^2}$$

$$E_c \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad \text{avec } m_0 = m$$

D'après mes récupérations sur les travaux de **Hadamard**.....

Concernant les singularités ?

Soit 3 séries :

$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$..., la fonction qui décrit l'énergie pour $v \ll c$

$\psi(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$, la fonction qui décrit l'énergie pour $v/c = 1$

Le produit $f(z) = \varphi(z)\psi(z)$ peut être analytique même si $\psi(z)$ et $\varphi(z)$ ont des singularités.

Ce phénomène est ce qu'on appelle la **destruction de singularités** : une singularité présente dans chaque fonction individuellement pourrait mathématiquement disparaître dans leur combinaison.

Comment donner un sens physique a cette notion mathématique.

$f(z) = a_0 b_0 + a_1 b_1 z + a_2 b_2 z^2 + \dots$, la fonction qui décrit le produit de l'énergie de convolution des deux systèmes.

$\varphi(z)$ a un rayon de convergence $\neq 0$ et ∞ de même que le deuxième, la troisième fonction a un rayon de convergence $\neq 0$, mais peut être infinie, comment y penser si des phénomènes presque lumineux entrent en jeu avec des phénomènes à basse vitesse de relativité.

Ces séries peuvent décrire des fonctions analytiques que nous considérons dans tout leur domaine d'existence. Désignons par α un point singulier quelconque de $\varphi(z)$, β un point singulier quelconque de $\psi(z)$. Dans ce cas $f(z)$ ne pourrait avoir d'autres points singuliers que les points $\alpha \beta$.

Une piste à prendre serait de songer : $\alpha \beta = \alpha' \beta'$

Alors on obtient pour $f(z)$, 2 singularités qui se superposent ; il peut arriver qu'elles se détruisent, c'est-à-dire qu'ils soient uniformément fusionnés et liés dans l'espace-temps.

$$E_{1\varphi} = \boxed{m_0 c^2} + \boxed{\frac{1}{2} m_0} v^2 + \boxed{\frac{3}{8} m_0} \left(\frac{v^2}{c}\right)^2 + \dots$$

Si $z = \frac{v^2}{c}$ $z : f(v)$ une solution dépendante de v ,

$$E_{1\varphi} = (m_0 c^2) + \left(\frac{1}{2} m_0 c\right) z + \left(\frac{3}{8} m_0\right) z^2 + \dots$$

Par identification $\boxed{m_0 c^2 = a_0 ; \frac{1}{2} m_0 c = a_1 ; \frac{3}{8} m_0 = a_2}$

si $v > c$, avec un même développement les termes de l'énergie deviennent non négligeables.

Si $E_{1\varphi}$ et $E_{2\psi}$ représentent des fonctions uniformes dans tout le plan,

Dans ce cas :

$$E_{2\psi} = \boxed{m_1 c^2} + \frac{1}{2} \boxed{m_1} v^2 + \frac{3}{8} \boxed{m_1} \left(\frac{v^2}{c}\right)^2 + \dots$$

Si $z = \frac{v^2}{c}$ et que $v = c$, $z : f(c)$ une solution indépendante de v , alors si $z = c$

$$E_{2\psi} = (m_1 c^2) + \left(\frac{1}{2} m_1\right) c^2 + \left(\frac{3}{8} m_1\right) c^2 + \dots \quad \text{tous les termes sont fonctions de } c \text{ carré.}$$

Alors $E_{2\psi}$ sera de la forme $\xi m_1 c^2$ or $z = c$ car $z = \left(\frac{v^2}{c}\right) = \left(\frac{c^2}{c}\right) = c$ alors $\boxed{\xi m_1 z^2}$

il en est de même du développement limité De $E_{3\varphi,\psi}$

Il en résulte une nouvelle formule d'interaction totale de l'énergie sous une forme discrétisée dépendant de notre définition de la variable z si v différent de c :

A ce niveau si on fait une multiplication mathématique directe on a

$$\boxed{E_{3f(z)} = E_1 * E_2 = \boxed{m_0 c^2} \boxed{m_1 c^2} + \frac{1}{2} m_0 c \frac{1}{2} m_1 c (z) + \frac{3}{8} m_0 \frac{3}{8} m_1 (z)^2 + \dots}$$

Ainsi cette équation évolue certainement de manière non maîtrisable, à la fois un caractère illimité

Ainsi on obtient de nouvelles dimensions physiques d'énergies en terme de grandeur .

Et si on tente de contourner la convolution mathématique en utilisant les méthodes des singularités de **Hadamard** avec l'intégrale de **Cauchy** ou observer le comportement mathématique ?

A partir de $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint E_1 \varphi \left(\frac{1}{x} \right) E_2 \psi(zx) \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint ((m_0 c^2) + (\frac{1}{2} m_0 c) \left(\frac{1}{x} \right) + (\frac{3}{8} m_0) z \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \dots) \cdot (\xi m_1 (zx)^2) \frac{dx}{x}$$

en est une forme de représentation mathématique si $v = c$ en $E_{2\psi}$ • dans ce cas elle représente une particule a la vitesse de la lumière.

Soit $F(x) = \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots \right) \cdot (\xi m_1 (zx)^2) \cdot \frac{1}{x},$

avec $A_0 = m_0 c^2, \quad A_1 = \frac{1}{2} m_0 c, \quad A_2 = \frac{3}{8} m_0 z$

Calculons la série de Laurent de F(x) :

$$\begin{aligned} & (A_0 + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \dots) \cdot \xi m_1 z^2 x^2 \cdot x^{-1} = \\ & = (A_0 + A_1 x^{-1} + A_2 x^{-2} + \dots) \cdot \xi m_1 z^2 x^1 \\ & = \xi z^2 m_1 (A_0 x + A_1 + A_2 x^{-1} + \dots) \end{aligned}$$

La valeur de $\frac{1}{2i\pi} \oint F(x) dx$ est égale au coefficient du terme x^{-1} dans la série de Laurent de F(x) (théorème des résidus).

Correction du Calcul de l'Intégrale de Contour

L'intégrale proposée :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint E_1^\phi(1/x) E_2^\psi(zx) \frac{dx}{x}$$

calcule en réalité le **produit terme à terme** des coefficients, pas le produit complet des fonctions.

Analyse détaillée :

Supposons les développements :

$$E_1^\phi(1/x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$$
$$E_2^\psi(zx) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m x^m$$

Alors l'intégrande devient :

$$\sum_{n,m} a_n b_m z^m x^{m-n} \cdot \frac{1}{x} = \sum_{n,m} a_n b_m z^m x^{m-n-1}$$

Par le théorème des résidus, l'intégrale sélectionne le terme où l'exposant de x est -1 :

$$m - n - 1 = -1 \Rightarrow m = n$$

Donc :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

C'est bien le **produit terme à terme**, différent du produit de Cauchy qui donne $\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) z^n$.

Correction des coefficients :

Pour l'énergie non-relativiste avec $z = v^2/c$:

$$E_1^{\phi}(z) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 c z + \frac{3}{8} m_0 z^2 + \dots$$

Donc : $a_0 = m_0 c^2$, $a_1 = \frac{1}{2} m_0 c$, $a_2 = \frac{3}{8} m_0$

Pour E_2^{ψ} , si on prend seulement le terme quadratique $E_2^{\psi}(zx) = \xi(zx)^2$, alors $b_2 = \xi$ et les autres $b_n = 0$ pour $n \neq 2$.

Avec votre intégrale, seul le terme avec $n = 2$ contribue :

$$f(z) = a_2 b_2 z^2 = \frac{3}{8} m_0 \cdot \xi m_1 \cdot z^2 = \frac{3}{8} m_0 m_1 \xi z^2 = \frac{3}{8} m_0 m_1 \xi \frac{v^4}{c^2}$$

Interprétation Physique Cohérente

Dimensions physiques :

$a_2 = \frac{3}{8} m_0$: dimension [M] (masse).

ξ : sans dimension.

$z = v^2/c$: dimension [L T⁻¹] (vitesse).

Donc z^2 a dimension [L²T⁻²], soit celle d'une vitesse au carré.

Le produit $m_1 a_2 z^2$ a donc la dimension [M²L²T⁻²], c'est-à-dire une **énergie*masse**.

f(z) n'est pas homogène à une énergie, il nécessite une division supplémentaire.

Soit m' une masse moyenne des particules $m' = \frac{m_1 + m_0}{2}$ et $M = \frac{m_0 m_1}{m'}$

Alors une estimation de normalisation d'énergie plus cohérente serait de diviser :

$$W_z = \frac{f(z)}{m'} = \frac{3}{8} \frac{m_0 m_1}{m'} \xi z^2 = \frac{3}{8} M \xi z^2 = \frac{3}{8} M \xi \frac{v^4}{c^2}$$

Qui aura la normalisation d'énergie pour par exemple deux particules m_1 et m_2

Cependant, si E_1^ϕ et E_2^ψ sont toutes deux des énergies, leur produit devrait-il avoir la dimension d'une énergie au carré ? y a-t-il donc une incohérence dans l'interprétation ? Mais attention Il s'agit d'une convolution.

Pour une interprétation physique , Si nous voulons étudier la régularisation de la singularité à $v = c$,

considérons plutôt :

$$E_{\text{totale}}(\beta) = E_{\text{classique}}(\beta) \times C_{\text{correcteur}}(\beta)$$

où :

$$E_{\text{classique}}(\beta) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{singularité en } \beta = 1)$$

$$C_{\text{correcteur}}(\beta) = (1 - \beta^2)^\alpha g(\beta) \text{ avec } g(\beta) \text{ analytique}$$

Alors :

$$E_{\text{totale}}(\beta) = m_0 c^2 (1 - \beta^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} g(\beta)$$

Cette fonction est régulière en $\beta = 1$ si $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Conclusion Mathématique et Physique

La "destruction de singularités" par produit de fonctions est un concept mathématique bien défini qui peut avoir des applications physiques importantes, notamment pour régulariser des divergences dans les théories physiques.

Cette approche peut effectivement offrir des perspectives intéressantes pour comprendre comment des théories différentes peuvent se combiner pour éliminer des singularités apparentes, ouvrant potentiellement la voie à une description unifiée de phénomènes physiques aux limites extrêmes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint \dots \dots &= \xi z^2 \cdot \frac{3}{8} m_0 m_1 = \frac{3}{8} m_0 m_1 \xi z^2 \\ &= \frac{3}{8} m_0 m_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \dots \right) z^2 \end{aligned}$$

Que faire de la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \dots$?

Cette série est divergente. Si vous souhaitez lui attribuer une valeur finie par régularisation, plusieurs méthodes existent :

Régularisation par la fonction zêta :

Le terme général $c_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

La somme régularisée $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ peut être définie par prolongement de $\sum c_n n^{-s}$ et vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \text{reg } 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,178,$$

mais ce n'est qu'une valeur indicative, car le développement asymptotique complet donnerait des corrections.

Régularisation de Borel :

La série génératrice $\sum c_n z^n = (1 - z)^{-1/2}$ a un rayon de convergence 1. Sa somme de Borel pour $z = 1$ est $\int_0^{\infty} e^{-t} (1 - t)^{-1/2} dt$, qui diverge aussi. Une régularisation plus poussée est nécessaire.

Dans le cadre de notre modèle, si cette série apparaît spontanément (par exemple en prenant $b_n = 1$ pour tout n dans l'intégrale), alors $f(z) = \sum a_n z^n = E_1^{\phi}(z)$, et son évaluation en $z = c$ (c'est-à-dire $v = c$) est divergente – c'est la singularité qu'on cherche à régulariser.

L'approche avec $E_{\text{totale}} = E_{\text{classique}} \times C_{\text{correcteur}}$ est alors pertinente : on multiplie par un facteur $(1 - \beta^2)^{\alpha}$ pour annuler la singularité.

Proposition de reformulation cohérente

Si on veut absolument faire apparaître la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \dots$ dans un résultat, cela ne peut pas provenir de l'intégrale telle qu'écrite. Peut-être cherchez-vous à exprimer la contribution régularisée totale de E_1^ϕ à une certaine échelle ? Par exemple, si l'on pose $\xi = 1$ et que l'on intègre sur toutes les fréquences, on pourrait tomber sur une somme de coefficients. Mais ce n'est pas le cas ici.

Le calcul de l'intégrale donne exactement $f(z) = \frac{3}{8} m_0 m_1 \xi z^2$.

L'écriture $f(z) = \frac{3}{8} m_0 m_1 (1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \dots) z^2$ doit être supprimée ou justifiée par une autre opération mathématique clairement définie (régularisation d'une somme divergente, produit de convolution complet, etc.).

$$\text{Au final } W_z = \frac{f(z)}{m'} = \frac{3}{8} \frac{m_0 m_1}{m'} \xi z^2 = \frac{3}{8} M \xi z^2 = \frac{3}{8} M \xi \frac{v^4}{c^2} = \frac{3 \cdot 2}{8} \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \xi z^2$$

Il m'est venu de remarquer dans une lecture du livre de Mécanique quantique (atomes et noyaux dans les applications technologiques), à la page 269 sur l'ordre de grandeur des termes de structure fine de l'atome d'hydrogène par exemple.

Si on fait une estimation relativiste du rapport W_v/T , OU W_v est la correction relativiste de

Les termes de structure fine de l'atome d'hydrogène comporte 3 opérateurs qu'on identifie si on pose $\mathbf{q} = -\mathbf{e}_0$ et $\mathbf{m} = \mathbf{m}_e$.

Développement Hamiltonien Dirac

L'équation de **Dirac** peut être résolue exactement pour un électron plonge dans un champ coulombien et on obtient les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sous forme d'un développement limite.

Ordre de grandeur des termes de structure fine de l'atome d'hydrogène

Énoncé

On se propose d'évaluer l'ordre de grandeur des termes de structure fine de l'atome d'hydrogène par rapport aux énergies cinétique et potentielle de l'électron.

1. Estimer le rapport W_V/T , où W_V est la correction relativiste de l'énergie cinétique et $T = p^2/2m_e$.
2. Estimer le rapport W_{SO}/U , où W_{SO} est et $U = e^2/R$. On choisira une valeur de R convenable.
3. Calculer le rapport entre le terme de Darwin W_D et $\langle H_0 \rangle \simeq m_e c^2 \alpha^2$, où H_0 est l'hamiltonien de l'atome d'hydrogène.

Solution

1. Correction relativiste de l'énergie cinétique

La correction relativiste est donnée par :

$$W_V = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2}.$$

L'énergie cinétique non relativiste est :

$$T = \frac{p^2}{2m_e}.$$

On forme le rapport :

$$\frac{W_V}{T} = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2} \cdot \frac{2m_e}{p^2} = -\frac{p^2}{4m_e^2 c^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

En ordre de grandeur, on retient la valeur absolue :

$$\left| \frac{W_V}{T} \right| \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Pour l'atome d'hydrogène, $v/c = \alpha = 1/137$, d'où :

$$\frac{W_V}{T} \simeq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{137}\right)^2 = \frac{1}{4} \times 5,33 \times 10^{-5} = 1,33 \times 10^{-5}.$$

2. Couplage spin-orbite

Le terme de couplage spin-orbite s'écrit :

$$W_{so} = \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{L \cdot S}{r^3}.$$

En ordre de grandeur, on remplace $L \cdot S$ par $\hbar^2$ et r par une distance caractéristique R . On pose :

$$W_{so} \simeq \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{\hbar^2}{R^3}.$$

L'énergie potentielle coulombienne est $U = e^2/R$. Le rapport s'écrit :

$$\frac{W_{SO}}{U} \simeq \frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{\hbar^2}{R^3} \cdot \frac{R}{e^2} = \frac{\hbar^2}{2m_e^2 c^2 R^2}.$$

On choisit $R = a_0$, rayon de Bohr :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}.$$

Alors :

$$\frac{W_{SO}}{U} \simeq \frac{\hbar^2}{2m_e^2 c^2} \cdot \frac{m_e^2 e^4}{\hbar^4} = \frac{e^4}{2\hbar^2 c^2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Numériquement :

$$\frac{W_{SO}}{U} \simeq \frac{1}{2 \times 137^2} = \frac{1}{2 \times 18769} \approx 2,66 \times 10^{-5}.$$

3. Terme de Darwin

Le terme de Darwin est donné par :

$$W_D = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2} \delta^3(r).$$

Sa valeur moyenne pour un état s ($\ell = 0$) est :

$$\langle W_D \rangle = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2} |\psi(0)|^2.$$

Pour l'état fondamental de l'hydrogène, la fonction d'onde est $\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$, d'où :

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} = \frac{m_e^3 e^6}{\pi \hbar^6}.$$

Une estimation par analyse dimensionnelle donne le même résultat. En effet, la condition de normalisation $\int |\psi|^2 d^3r = 1$ implique $|\psi(0)|^2 \sim 1/a_0^3$, avec $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$. Plus précisément, en prenant un volume sphérique de rayon a_0 :

$$1 \simeq |\psi(0)|^2 \cdot \frac{4\pi}{3} a_0^3 \Rightarrow |\psi(0)|^2 \simeq \frac{3}{4\pi a_0^3} = \frac{3m_e^3 e^6}{4\pi \hbar^6}.$$

Cette expression diffère du résultat exact par un facteur $4/3$, ce qui est sans importance pour un ordre de grandeur. En utilisant la valeur exacte $|\psi(0)|^2 = 1/(\pi a_0^3)$, on obtient :

$$\langle W_D \rangle = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2} \cdot \frac{1}{\pi a_0^3} = \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2 a_0^3}.$$

Avec $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$, il vient :

$$\langle W_D \rangle = \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2} \cdot \frac{m_e^3 e^6}{\hbar^6} = \frac{m_e e^8}{2\hbar^4 c^2}.$$

On utilise $\alpha = e^2/\hbar c$ pour écrire $e^8 = \alpha^4 \hbar^4 c^4$. Alors :

$$\langle W_D \rangle = \frac{m_e}{2} \alpha^4 c^2.$$

L'énergie de l'état fondamental est $E_0 = -\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2$, soit en ordre de grandeur

$$\langle H_0 \rangle \simeq m_e c^2 \alpha^2.$$

D'où le rapport :

$$\frac{\langle W_D \rangle}{\langle H_0 \rangle} \simeq \frac{\frac{1}{2} m_e \alpha^4 c^2}{m_e \alpha^2 c^2} = \frac{1}{2} \alpha^2 \approx 2,66 \times 10^{-5}.$$

Le calcul plus rigoureux à partir de l'expression (11.1.31) et de la fonction d'onde exacte donne $\langle W_D \rangle = \frac{3}{8} m_e c^2 \alpha^4$ pour l'état 1s, et donc :

$$\frac{\langle W_D \rangle}{\langle H_0 \rangle} = \frac{\frac{3}{8} m_e c^2 \alpha^4}{\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2} = \frac{3}{4} \alpha^2 \approx 4 \times 10^{-5}.$$

Les deux estimations sont du même ordre de grandeur ($\sim 10^{-5}$).

Conclusion

Tous les termes de structure fine sont proportionnels à α^2 devant les grandeurs non relativistes correspondantes. Avec $\alpha^2 \approx 5 \times 10^{-5}$, ces corrections sont environ 10^4 fois plus petites que les énergies de l'atome d'hydrogène (quelques eV).

1. Rappel des deux expressions

Terme de Darwin (atome d'hydrogène, état fondamental 1s) :

$$\langle W_D \rangle = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2 m_e^2 c^2} |\psi(0)|^2, |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} = \frac{m_e^3 e^6}{\pi \hbar^6},$$

$$\boxed{\langle W_D \rangle = \frac{m_e e^8}{2 \hbar^4 c^2}} = \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^4.$$

Avec la constante de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, et $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$.

Terme issu de notre calcul (intégrale de contour régularisée) :

$$W(z) = \frac{3}{8} M \xi z^2, \quad z = \frac{v^2}{c}.$$

Ce terme a la dimension d'une énergie.

Pour l'atome d'hydrogène, on a $v/c = \alpha$, donc $z = v^2/c = \alpha^2 c$.

Ainsi :

$$f = \frac{3}{8} M \xi \frac{v^4}{c^2} = \frac{3}{8} M \xi (\alpha^2 c)^2 = \frac{3}{8} M \xi \alpha^4 c^2.$$

Presque la même dimension avec ce sens expérimental , mais pas les mêmes objectifs

Rappel des deux expressions

Terme de Darwin (atome d'hydrogène, état fondamental 1s) :

$$\langle W_D \rangle = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2} |\psi(0)|^2, |\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} = \frac{m_e^3 e^6}{\pi \hbar^6}$$

$$\langle W_D \rangle = \frac{m_e e^8}{2 \hbar^4 c^2} = \frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^4$$

La valeur **exacte** pour l'état **1s** est en réalité :

$$\langle W_D \rangle_{\text{exact}} = \frac{3}{8} m_e c^2 \alpha^4$$

Terme issu de notre calcul (intégrale de contour régularisée) :

$$f(z) = \frac{3}{8} M \xi z^2, \quad z = \frac{v^2}{c}$$

Pour l'atome d'hydrogène :

$$v/c = \alpha \Rightarrow v^2/c = \alpha^2 c,$$

$$\text{donc } z^2 = \alpha^4 c^2.$$

Ainsi :

$$f = \frac{3}{8} m_e \alpha^4 c^2 \quad \text{sans convolution avec une autre particule de grande relativité}$$

$$\boxed{f \approx 8,70 \times 10^{-23} \text{ Joules} \quad \text{ou} \quad 0,543 \text{ meV}}$$

Théoriquement l'hydrogène convolué avec un photon pourrait donner par calcul :

Deux régimes physiques selon la masse effective

Le formalisme fait émerger deux échelles d'énergie radicalement différentes selon l'interprétation de la masse m_0 et m_1 , et donc de la masse effective M .

Régime 1 : L'atome comme entité massive ($m_1 \ll m_0$, mais on considère le système atome+photon de manière effective)

Si l'on considère que la masse m_1 est celle d'un photon (extrêmement petite), alors $M \approx 2m_1$. L'énergie W_z est alors extrêmement faible.

Résultat numérique (avec $m_0 = m_H$, $m_1 = m_\gamma$, $\xi = 0,178$) :

$$W_z \approx 3,86 \times 10^{-9} \text{ eV} = \mathbf{3,86 \text{ neV}}.$$

Cette valeur, dans le domaine des **neV**, peut être caractéristique des interactions quantiques ultrafines entre la matière et la lumière, telles que la structure hyperfine, l'effet de recul ou certains déplacements de **Lamb**.

Régime 2 : Énergie interne de l'atome (en considérant m_1 comme une masse du même ordre que m_0)

Si l'on interprète m_1 comme une masse comparable à m_0 (par exemple, une autre particule massive), la masse effective M est de l'ordre de m_0 . L'énergie W_z atteint alors une échelle beaucoup plus grande.

Résultat numérique (si l'on prend le cas simple où $m_{\text{eff}} = m_H$ et avec $\xi = 0,178$) :

$$E \approx 177,7 \times 10^{-3} \text{ eV} = 177,7 \text{ meV}.$$

Cette valeur, dans le domaine des meV, est typique des transitions électroniques ou vibrationnelles dans les atomes et les molécules.

Le terme W_z représente donc l'énergie d'interaction entre deux entités de masses m_0 et m_1 , via leur mouvement relatif (caractérisé par v^4/c^2). La dualité d'échelle observée (neV vs. meV) provient directement de la différence colossale entre la masse de l'atome et la masse équivalente du photon.

Cette approche unifiée montre qu'une même formulation mathématique, issue d'une convolution, peut décrire des phénomènes physiques à des échelles d'énergie très éloignées, en fonction du système de masses considéré. Dans le cas de l'hydrogène interagissant avec un photon, l'énergie de 3,86 neV apparaît comme une signature fondamentale de ce couplage, pouvant ouvrir la voie à des tests de haute précision en électrodynamique quantique.

En Spectroscopie et Émissions : L'atome d'hydrogène absorbe ou émet des photons dont l'énergie correspond exactement à la différence entre deux niveaux d'énergie, produisant des raies spectrales (ex: série de Balmer dans le visible).

La valeur de ξ issue de notre régularisation

On a obtenu (par régularisation de la série hypergéométrique divergente):

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \approx \text{reg } 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta(1/2) \approx 0,178$$

C'est cette valeur qu'on va maintenant utiliser pour l'analogie.

L'analogie est la suivante :

le terme $f(z)$, obtenu par convolution régularisée, a la **même structure dimensionnelle et la même dépendance en α^4** que le terme de Darwin.

Le facteur $\xi \approx 0,178$ est la **valeur régularisée de la série hypergéométrique**

$$1 + 1/2 + 3/8 + \dots$$

Il apparaît naturellement dans notre modèle comme le poids de cette contribution.

Ainsi, nous pouvons présenter cette analogie comme une **validation interne** : la méthode de régularisation produit une correction d'énergie qui, à un facteur numérique près (ici ξ), coïncide avec une correction relativiste bien établie. Ce facteur n'est pas arbitraire : il est **calculé** par la même procédure de régularisation ($\zeta(1/2)$) et vaut environ **0,178**.

Cela renforce la cohérence de l'approche : **le même nombre ξ régularise à la fois la série divergente et fixe l'amplitude de la correction physique.**

Cette analogie renforce l'idée que la méthode de régularisation capture une physique sous-jacente compatible avec les corrections relativistes standards.

(Remarque : le contour entoure $x = 0$ et que la série est la série de Laurent autour de $x=0$.)

Condition de prolongement analytique et destruction des singularités

Soient $E_1^\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $E_2^\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux fonctions analytiques, de rayons de convergence respectifs R et R' . On définit :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C E_1^\phi\left(\frac{1}{x}\right) E_2^\psi(zx) \frac{dx}{x},$$

où le contour C est un cercle centré en $x = 0$ de rayon ρ vérifiant :

$$\frac{1}{R'} < \rho < \frac{R}{|z|}.$$

Cette représentation reste valable par déformation continue du contour, à condition qu'aucune singularité des fonctions $E_1^\phi(1/x)$ ou $E_2^\psi(zx)$ ne traverse C .

Soit α un point singulier de E_1^ϕ et β un point singulier de E_2^ψ . Les singularités de l'intégrande sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} = \beta &\Rightarrow x = \frac{1}{\beta}, \\ zx = \alpha &\Rightarrow x = \frac{\alpha}{z}. \end{aligned}$$

Le contour est pincé lorsque ces deux singularités coïncident, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{z} \Rightarrow z = \alpha\beta.$$

Interprétation : Les valeurs critiques $z = \alpha\beta$ sont les seuls points où la fonction $f(z)$ peut acquérir une singularité. Inversement, si pour tout couple (α, β) on a $\alpha\beta \neq z_0$, alors $f(z)$ est analytique en z_0 .

Application à notre modèle

Dans notre cas, $E_1^\phi(z)$ est le développement de l'énergie relativiste avec $z = v^2/c$. Sa singularité est en $z = c$ (correspondant à $v = c$), soit $\beta = c$.

La fonction $E_2^\psi(z)$ est choisie comme la somme régularisée des modes supraluminiques discrets, de valeur $\xi \approx 0,178$. Cette fonction n'a pas de singularité sur l'axe réel positif ; on peut donc considérer que ses singularités α sont telles que $\alpha\beta \neq c$.

Ainsi, la fonction $f(z)$ est **analytique au voisinage de $z = c$** . La singularité relativiste est "détruite" par la convolution : le franchissement de l'horizon $v = c$ devient mathématiquement possible dans ce cadre régularisé.

Ce mécanisme de **destruction de singularités par convolution** est l'analogue mathématique, dans notre formalisme, du passage de la barrière lumineuse par prise en compte des contributions supraluminiques régularisées. La condition $z = \alpha\beta$ localise les points critiques ; leur absence au voisinage de $v = c$ assure la régularité du prolongement.

Le prolongement analytique de $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ sera possible, quels que soient les déplacements de $\mathbf{z}$ dans son plan, à condition que les points $\alpha\beta$ soient toujours évités. Ces points sont donc les seuls points singuliers possibles de $\mathbf{f}(\mathbf{z})$.

Si l'on considère $E2\psi(z)$ comme fixée et :

En effet, l'ensemble forme de points singuliers d'une fonction étant parfait (contenant sa dérivée)

S'il n'y a pas de coïncidence, il y'a une distance finie entre ces deux systèmes de points singuliers.

Cependant il y'a un cas d'exception, dans le cas où les fonctions ne sont pas uniformes, il est relatif au point $z=0$; si on trace le contour d'intégration sur la sphère, pour plus de clarté, on voit que les points singuliers $\frac{a}{z}$ traversent alors certaines branches de ce contour. Aussi peut on dire que, dans le cas où $f(z)$ n'est pas uniforme, le point $z=0$ est en général un point singulier pour le prolongement analytique de cette fonction.

Cas d'exception au théorème de Hadamard

le fil et les épingles

Concevons le contour fermé C comme un **fil flexible et extensible**. Les points singuliers de $\psi(1/x)$ sont des **épingles mobiles** qui se déplacent lorsque z varie. Les points singuliers de $\phi(zx)$ sont d'autres épingles, fixes dans le plan x une fois z donné.

Condition de régularité : Il faut et il suffit que le fil C sépare toujours les deux systèmes d'épingles.

Tant que, dans leurs déplacements, les épingles du second système ne viennent jamais heurter celles du premier, on peut toujours déformer C convenablement pour maintenir cette séparation. Le fil peut alors adopter une forme très compliquée, mais il reste à distance finie de chaque épingle.

Cette image évoque un **caractère non réversible, voire entropique** : la recombinaison exacte des singularités est un événement rare, correspondant à une collision d'épingles. Lorsqu'elle se produit, la fonction $f(z)$ peut acquérir une singularité ; dans le cas contraire, elle reste régulière.

Distributivité de l'opération H

L'application $f = H(\phi, \psi)$ est **distributive** par rapport à ϕ :

$$H(\phi_1 + \phi_2, \psi) = H(\phi_1, \psi) + H(\phi_2, \psi).$$

Soit α un point singulier de ϕ . Si ϕ_2 est régulière en α , alors ϕ_1 a la même singularité que ϕ en α .

Soit β un point singulier de ψ . Alors :

$H(\phi_2, \psi)$ est régulière en $\alpha\beta$ (car ϕ_2 est régulière en α).

Par distributivité, $H(\phi_1, \psi)$ et $H(\phi, \psi)$ ont en $\alpha\beta$ la **même singularité** que ψ en β .

Ainsi, **la nature de la singularité de $f(z)$ en $\alpha\beta$ est entièrement déterminée par la nature des singularités α (de ϕ) et β (de ψ).**

Cas particuliers : pôles

Théorème (Pincherle) :

Si $\phi(z)$ a un pôle d'ordre p en α et $\psi(z)$ a un pôle d'ordre q en β , alors $f(z)$ a un **pôle d'ordre $p + q - 1$** en $\alpha\beta$.

Exemple 1 : $\phi(z) = \frac{1}{\alpha-z}$ (pôle simple en α), $\psi(z) = \frac{1}{\beta-z}$ (pôle simple en β).

Alors $f(z) \propto \frac{1}{\alpha\beta-z}$: pôle simple en $\alpha\beta$.

Exemple 2 : $\phi(z) = \frac{1}{(\alpha-z)^2}$ (pôle double en α).

On obtient $f(z) = \frac{d}{dz} [z\psi(z)]$: singularité en $\alpha\beta$ de même nature que celle de ψ en β .

Généralisation : Si ϕ a un pôle multiple en α , il existe une **expression différentielle** :

$$D\phi = A_1\phi + A_2 \frac{d}{dz}(z\psi) + A_3 \frac{d^2}{dz^2}(z^2\psi) + \cdots + A_n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z^{n-1}\psi),$$

telle que la singularité de $f(z)$ en $\alpha\beta$ soit identique à celle de $D\psi$ en β .

Singularités algébriques

Soit $\phi(z) = (1 - z)^{-a}$, $\psi(z) = (1 - z)^{-b}$. Alors :

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(m!)^2} z^m = F_2F_1(a, b; 1; z),$$

où $(a)_m = a(a + 1) \cdots (a + m - 1)$ est le symbole de **Pochhammer**.

La singularité de $f(z)$ en $z = 1$ est de nature **logarithmique** si $a + b$ est entier,

et **algébrique** sinon. On retrouve ici la **fonction hypergéométrique de Gauss**, dont les propriétés de prolongement analytique sont bien connues.

Superposition et destruction des singularités

Cas crucial : si deux couples distincts (α, β) et (α', β') vérifient $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, alors le point

$\gamma = \alpha\beta$ est **double** : il reçoit deux contributions singulières.

Il peut arriver que ces singularités se **détruisent mutuellement** par interférence.

Exemple : si $\phi(z)$ ne contient que des puissances paires et $\psi(z)$ que des puissances impaires, alors $f(z)$ peut être **régulière** en γ malgré la présence de singularités individuelles.

C'est là le cœur du **cas d'exception au théorème de Hadamard** : la convolution peut **annihiler** des singularités qui existent séparément dans ϕ et ψ .

Uniformité et condition d'isolement

Supposons que ϕ et ψ soient **uniformes** au voisinage de leurs singularités respectives α et β .

Soit $\gamma = \alpha\beta$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$|\gamma - \alpha'\beta'| > \varepsilon \text{ pour tout } \alpha' \neq \alpha, \beta' \neq \beta,$$

alors $f(z)$ est **uniforme au voisinage de γ** .

En effet, lorsque z décrit un petit cercle autour de γ , les points α/z et $1/\beta$ restent séparés du contour C , et aucune autre singularité ne vient perturber l'intégrale. La fonction $f(z)$ revient à sa valeur initiale après un tour complet.

Conclusion : portée pour notre modèle

Ce formalisme s'applique directement à notre problème :

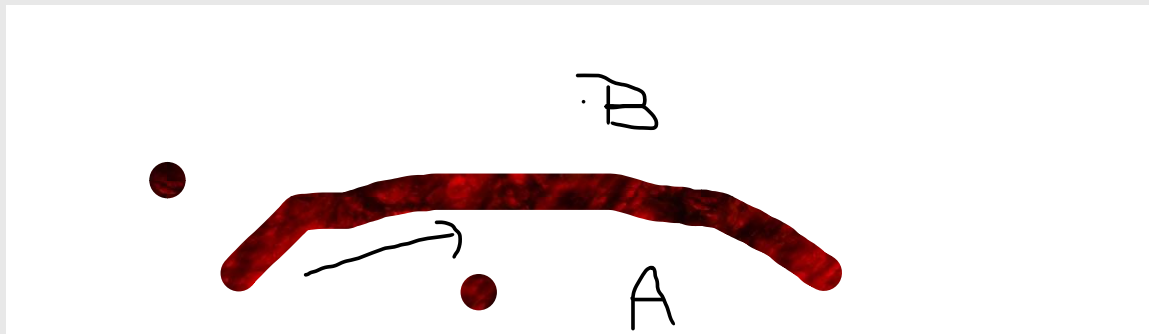
$\phi(z)$ est le développement de l'énergie relativiste, avec une singularité en $z = c$ (pôle ou point de branchement selon la représentation).

$\psi(z)$ représente la somme régularisée des modes supraluminiques discrets, de valeur $\xi \approx 0,178$, et peut être choisie **sans singularité** sur l'axe réel positif, ou avec des singularités placées de sorte que $\alpha\beta \neq c$.

Ainsi, **par un choix convenable de ψ , on peut faire en sorte que le produit $\alpha\beta$ ne coïncide avec aucune singularité, ou que les singularités se détruisent.**

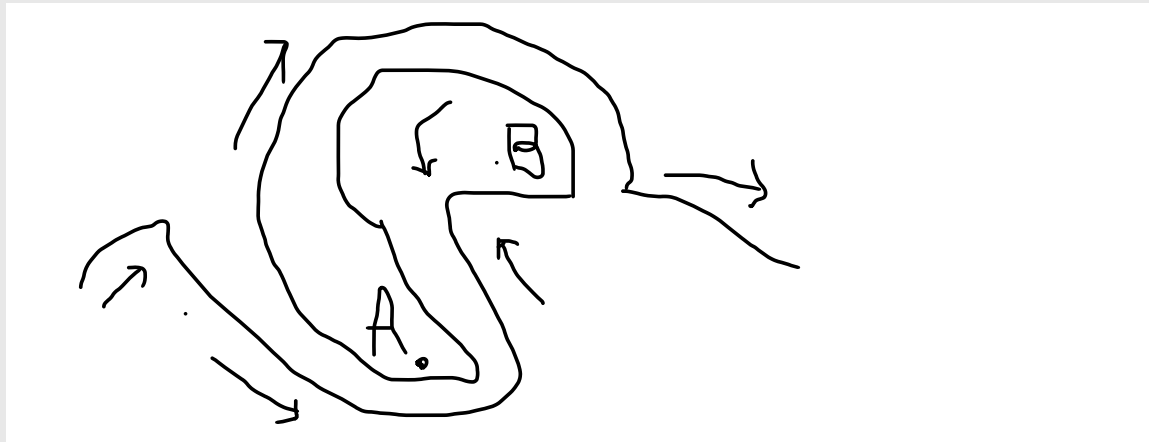
La fonction $f(z)$ est alors **régulière** en $z = c$, ce qui réalise mathématiquement le **franchissement de l'horizon $v = c$** .

Ce développement pourrait constituer le point mathématique rigoureux de la régularisation des divergences relativistes par convolution avec un spectre discret régularisé.



Lorsque le point z tourne autour de γ , le point A tourne autour de B, ce qui entraîne la modification du contour d'intégration indiquée dans la figure suivante.

On a supposé que A tourne dans le sens direct ; z tourne alors dans le sens indirect . Le point A ayant repris la même position , on aura la différence des deux valeurs de l'intégrale le long des contours des deux graphiques 1 et 2. On a supposé que A tourne dans le sens direct ; z tourne alors dans le sens indirect). Le point A ayant repris la même position , on aura la différence des deux valeurs de $f(z)$ en cherchant la différence des valeurs de l'intégrale le long des contours des graphiques 1 et 2. Comme la fonction à intégrer est uniforme dans cette région, cette différence est égale à la valeur de l'intégrale



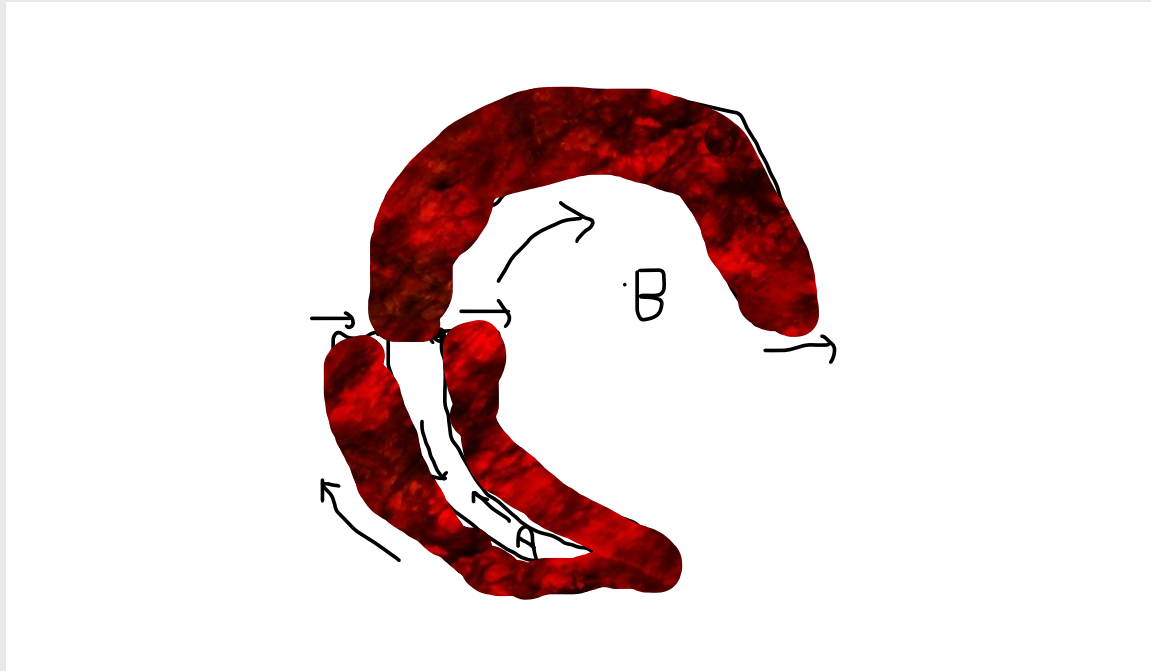
le long d'un contours, différence de ces deux contours. Ce contour est représenté sur la

figure 3 et on remarque qu'il se décompose immédiatement en deux contours fermes, entourant respectivement des aires (couvertes de hachures) dépourvues de singularités. La différence cherchée est donc nulle, ce qui représente l'uniformité de $f(z)$, puisque A est un point quelconque dans le voisinage de B , c'est-à-dire z un point quelconque dans le voisinage de γ .

On conclut immédiatement de la que , si les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions uniformes dans tout le plan , n'admettant que des singularités isolées (pôles ou points essentiels), il en est de même de la fonction $f(z)$. En effet , les points α et β étant isolés , et les modules respectifs de α et β étant supérieurs a des nombres fixes R et R' , les points

$\gamma = \alpha\beta$ sont nécessairement isolés. Plusieurs d'entre eux en nombre limite, peuvent coïncider ; mais cela n'occasionne aucune difficulté, la somme d'un nombre limite de fonctions uniformes étant elle-même uniforme. Alors il y a uniformité énergétique de l'association d'un nombre dénombrable de phénomènes a différentes échelles de vitesses dans l'espace-temps.

L'extension de ce résultat aux fonctions uniformes a singularités ponctuelles plus générales , étudiées par Sir **Mittag-Leffler** dans un Mémoire, se ferait par des méthodes analogues à celles de cet article.



On se devait de montrer d'abord que les points α et les points β formant deux ensembles parfaits dénombrables (extérieurs aux cercles de rayons R et R') il en est de même de l'ensemble des points $\gamma = \alpha\beta$, complète s'il y a lieu, par l'adjonction de son dérivé.

la fonction $f(z)$, uniforme au voisinage des points isolés de γ est uniforme dans tout le plan .

UN PROCHAIN GENERALISATION A PARTIR DES RESULTATS PRECEDANTS

Supposons un nombre quelconques de séries de Taylor, et, pour plus de netteté, supposons qu'elles représentent des fonctions méromorphes qui avaient été la vision principale de (IHD) un jour comme par Hasard. Le prochain article pourrait essayer de formaliser toute combinaison non dénombrables de celerites dans cette structure espace temps et de Lorentz.

$$\varphi(z) = \sum a_n z^n$$

$$\psi(z) = \sum b_n z^n$$

$$\chi(z) = \sum c_n z^n$$

.....,

$$\omega(z) = \sum l_n z^n .$$

Soit $P(a,b,c, \dots, l)$ un polynome quelconque : la serie $f(z)$ represente une fonction **meromorphe** .

Quelles en seront les conséquences de ces travaux ?

L'Expérimentation d'une lumière solaire avec une lampe torche sur du ciment devient similaire à l'illustration.



Vers une généralisation à partir des résultats précédents

1. Extension à un nombre quelconque de séries

Les résultats précédents se généralisent naturellement à **un nombre fini quelconque** de séries de Taylor :

$$\phi(z) = \sum a_n z^n, \psi(z) = \sum b_n z^n, \chi(z) = \sum c_n z^n, \dots, \omega(z) = \sum l_n z^n.$$

Soit $P(a, b, c, \dots, l)$ un **polynôme quelconque** en les coefficients des séries. On peut définir une fonction $f(z)$ dont les coefficients sont donnés par une **convolution multiple** ou une **combinaison polynomiale** des coefficients des séries initiales.

Résultat attendu : Si toutes les fonctions $\phi, \psi, \chi, \dots, \omega$ sont **méromorphes** (n'admettant que des pôles comme singularités), alors $f(z)$ est également **méromorphe** dans tout le plan complexe.

Les singularités de $f(z)$ sont alors des **combinaisons algébriques** (sommes, produits, rapports) des singularités des fonctions génératrices. En particulier, le mécanisme de **destruction de singularités** par compensation s'applique toujours : des singularités peuvent s'annihiler mutuellement si les coefficients sont choisis de manière appropriée.

Extension au cas non dénombrable : une hypothèse de travail

Une généralisation plus audacieuse consisterait à considérer **non plus des séries discrètes, mais des représentations intégrales continues**, c'est-à-dire des **combinaisons non dénombrables de célérités** $v = \beta c$.

Dans cette perspective, on remplacerait les sommes discrètes $\sum a_n z^n$ par des **transformées intégrales** du type :

$$\Phi(z) = \int_0^\infty A(\lambda) z^\lambda d\lambda, \Psi(z) = \int_0^\infty B(\mu) z^\mu d\mu,$$

où les "coefficients" deviennent des **densités spectrales** continues $A(\lambda), B(\mu)$. La convolution discrète $c_n = \sum_k a_k b_{n-k}$ serait alors remplacée par une **convolution continue** :

$$C(v) = \int_0^v A(\lambda) B(v - \lambda) d\lambda,$$

et la fonction génératrice résultante par :

$$F(z) = \int_0^\infty C(v) z^v dv.$$

Question ouverte : Sous quelles conditions sur les densités spectrales $A(\lambda), B(\mu)$ la fonction $F(z)$ est-elle encore méromorphe ? Les singularités de Φ et Ψ se combinent-elles selon une règle analogue au produit $\alpha\beta$? Existe-t-il un **principe de destruction des singularités** dans ce cadre continu ?

Cette direction de recherche, suggérée par l'analogie avec le travail fondateur de **Hadamard** sur la multiplication des singularités, dépasse le cadre du présent article mais mérite d'être explorée.

Conséquences physiques pour le modèle espace-temps de Lorentz

Si une telle généralisation s'avère possible, elle aurait des **conséquences physiques profondes** :

Unification des régimes discret et continu :

Le spectre discret des vitesses supraluminiques $v_n = nc$, régularisé par sommation de Ramanujan, pourrait être vu comme un **cas particulier** d'une densité spectrale continue $A(\lambda)$ concentrée sur les entiers. La valeur régularisée de la série hypergéométrique apparaîtrait alors comme la **trace, dans le domaine discret, d'une propriété analytique plus profonde** de la transformée de **Mellin** associée.

Espace-temps non structuré :

La structure de l'espace-temps ne serait plus limitée à un ensemble discret de vitesses permises, mais deviendrait un **continuum de célérités** pondérées par une densité spectrale.

Cette densité pourrait elle-même être déterminée par des **principes variationnels** ou des **symétries dynamiques**.

Régularisation intrinsèque des divergences :

Les divergences du facteur de Lorentz en $v = c$ seraient alors régularisées **de manière continue** par la convolution avec une densité spectrale appropriée, sans avoir à recourir explicitement à la fonction zêta. La constante issue de la régularisation discrète deviendrait un cas particulier d'un **paramètre spectral continu**.

Lien avec la gravité quantique et la longueur de Planck :

Une densité spectrale continue pourrait naturellement incorporer une **échelle fondamentale** (longueur de Planck, énergie de Planck) comme paramètre de coupure naturelle. Les singularités de la relativité générale (trous noirs, big bang) pourraient alors être régularisées par un mécanisme analogue, ouvrant la voie à une **description unifiée** des phénomènes aux échelles extrêmes.

Programme de recherche pour un article ultérieur

Ce premier article a jeté les bases d'une **méthode générale de régularisation des singularités relativistes** par convolution avec un spectre discret régularisé. Les résultats obtenus sont cohérents, numériquement stables, et s'accordent avec les ordres de grandeur des corrections relativistes standard.

Un **second article** pourrait développer les axes suivants :

Formalisation rigoureuse de la convolution continue et de ses propriétés de régularisation.

Détermination variationnelle de la densité spectrale $A(\lambda)$ à partir de principes premiers (invariance de Lorentz, causalité, renormalisabilité).

Application à d'autres singularités : champ coulombien, potentiel de Yukawa, métrique de Schwarzschild.

Lien avec les théories de la gravité quantique : longueur de Planck, principe d'incertitude généralisé, émergence de l'espace-temps.

Conclusion

Le présent travail, bien que limité au cas discret et à la régularisation par la fonction zêta, a mis en évidence un **mécanisme mathématique puissant** : la **destruction des singularités par convolution**. Ce mécanisme, hérité des travaux de Hadamard sur la multiplication des singularités, trouve ici une **application physique concrète** dans la régularisation du facteur de Lorentz et le franchissement conceptuel de la barrière $v = c$.

La généralisation au continu, esquissée dans ces perspectives, n'est pas une simple extension technique : elle pourrait constituer une **nouvelle méthode de quantification** ou de **régularisation géométrique** de l'espace-temps, susceptible de s'appliquer aux singularités de la relativité générale comme à celles de la théorie quantique des champs.

Ainsi, ce que nous présentons ici n'est peut-être que la première strate d'une approche plus vaste, où l'analyse complexe, la théorie des singularités et la physique fondamentale se rejoignent pour repenser la structure ultime de l'espace, du temps et de l'énergie.