L'INESISTENZA DEL TEMPO

Formula matematica

Francesco Mappa
https://orcid.org/0000-0001-9042-6758

FORMULA SULL'INESISTENZA DEL TEMPO

$$\sup_{F\in\mathcal{F}}\ \sup_{h:I\to\mathcal{C}}\ \sup_{\sigma\in\mathrm{Diff}^{+}(I)}\ \left|F(h)-F(h\circ\sigma)\right|=0$$

Nelle teorie fisiche standard, come la meccanica classica o la meccanica quantistica non relativistica, il tempo è trattato come un parametro esterno, universale ed assoluto. Le equazioni di moto descrivono come i sistemi evolvono "nel tempo", e questo "tempo" **t** è considerato una quantità osservabile e fondamentale.

Nelle teorie più avanzate, come la relatività generale (la teoria di Einstein della gravità), questa visione del tempo cambia radicalmente. Difatti, esso non è più un sottofondo fisso, ma diventa una coordinata dinamica che si intreccia con lo spazio, formando lo spaziotempo. Un aspetto cruciale di queste teorie è l'**invarianza di riparametrizzazione**: le leggi fisiche devono essere le stesse indipendentemente da come scegliamo di "etichettare" i punti lungo una traiettoria od un'evoluzione. Questo porta al cosiddetto "Problema del Tempo" in gravità quantistica, dove la nozione di un tempo assoluto ed osservabile scompare.

La formula che andrò a spiegare cattura proprio questa essenza: se tutte le quantità fisiche che possiamo misurare sono insensibili al modo in cui parametrizziamo l'evoluzione di un sistema, allora il parametro stesso (il "tempo") non ha un significato fisico intrinseco ed osservabile.

SPIEGAZIONE

La formula è un'equazione che stabilisce l'**invarianza di riparametrizzazione completa** delle quantità fisicamente misurabili.

Più precisamente, essa afferma che **l'estremo superiore** (**supremum**) **del valore assoluto della differenza tra qualsiasi funzionale fisico *F* applicato ad una storia *h* e lo stesso funzionale applicato alla medesima storia *h* o σ** (**dove *h* o σ è una riparametrizzazione della storia *h***) **è identicamente zero, considerando tutte le possibili osservabili fisiche, storie e riparametrizzazioni.**

In termini semplici, la formula definisce che *non esiste alcuna osservabile fisica in grado di distinguere tra una data evoluzione di un sistema e la stessa identica evoluzione descritta con una parametrizzazione (un "tempo") diversa.*

1. Definizioni

- I: intervallo reale di parametrizzazione.
- $\mathcal{C}$: spazio delle configurazioni dell'universo.
- $h : I \to \mathcal{C}$: una storia (curva) nell'universo.
- $\mathrm{Diff}^+(I)$: gruppo dei diffeomorfismi orienta-preservanti di I.
- $\mathcal{F}$: insieme dei funzionali misurabili fisicamente F sulle storie.
- Concetto centrale: invarianza di riparametrizzazione via il gruppo di diffeomorfismi.

2. Formula unica sull'inesistenza del tempo

$$\boxed{\sup_{F\in\mathcal{F}} \sup_{h:I\to\mathcal{C}} \sup_{\sigma\in\mathrm{Diff}^+(I)} \left|F(h) - F(h\circ\sigma)\right| = 0}$$

- Significa: tutte le quantità fisiche sono invarianti sotto ogni riparametrizzazione monotona del parametro t, dunque il parametro temporale è non osservabile (gauge) e non esiste come entità fisica autonoma.

INVARIANZA DI RIPARAMETRIZZAZIONE

L'**invarianza di riparametrizzazione** è un concetto fondamentale in alcune teorie fisiche, in particolare quelle che trattano la gravità (come la Relatività Generale) e la teoria delle stringhe. Si riferisce alla proprietà che **le leggi fisiche e le quantità osservabili rimangono invariate** (**non cambiano**) **anche se si cambia il modo in cui si etichettano o si "parametrano" gli eventi o l'evoluzione di un sistema.**

Cerchiamo di scomporlo:

1. Parametrizzazione:

Immagina di percorrere una strada. La strada stessa è una traiettoria geometrica. Per descrivere il tuo viaggio, potresti usare un parametro:

- Il tempo sul tuo orologio (\`t\`).
- I chilometri percorsi dall'inizio (\`s\`).
- L'angolo della lancetta dei secondi di un orologio sincronizzato con un faro ogni 10 metri (\`θ\`).

Tutti questi sono modi per "parametrare" (cioè, assegnare un'etichetta numerica) ogni punto della tua traiettoria. La *strada* è la stessa, ma il parametro che usi per descriverla è diverso.

In fisica, spesso descriviamo l'evoluzione di un sistema (la sua "storia" o "traiettoria") come una funzione \`h(p)\`, dove \`p\` è un parametro (spesso il "tempo" \`t\`). Questa funzione \`h(p)\` ci dice quale configurazione il sistema assume per ogni valore di \`p\`.

2. Riparametrizzazione:

Una riparametrizzazione è semplicemente un **cambio di questo parametro**. Se prima usavi \`p\`, ora puoi decidere di usare un nuovo parametro \`p'\` che è una funzione del vecchio: \`p = σ(p')\`. Di conseguenza, la tua storia diventa \`h(σ(p'))\`.

Come nell'esempio della strada, questo significa che stai descrivendo *la stessa traiettoria geometrica* nello spazio delle configurazioni, ma stai usando un sistema di etichettatura (o "velocità di scansione") diverso.

Nel contesto della formula, `$\sigma \in \mathrm{Diff}^{+}(I)$` rappresenta proprio una tale riparametrizzazione: una trasformazione liscia e reversibile che riorganizza le etichette dell'intervallo `I`.

3. Invarianza:

L'invarianza di riparametrizzazione significa che **le previsioni fisiche della teoria non devono dipendere dalla particolare scelta del parametro.** In altre parole, se descrivi lo stesso evento o la stessa evoluzione fisica con due diverse parametrizzazioni, le quantità che puoi misurare e le leggi che governano il sistema devono rimanere esattamente le stesse.

Tornando all'esempio della strada:

- La lunghezza della strada è una quantità fisica misurabile. Non dovrebbe cambiare se la misuri usando il tempo del tuo orologio o i chilometri percorsi.
- La bellezza del paesaggio che vedi è un'osservabile (sebbene soggettiva). Non dovrebbe cambiare solo perché hai deciso di guardare l'orologio ogni 5 secondi invece che ogni 10.

In termini della formula: `$F(h) = F(h \circ \sigma)$`. Questo significa che il valore di qualsiasi quantità fisica osservabile (`F`) di una storia (`h`) non cambia se la storia viene riparametrizzata (`$h \circ \sigma$`).

Implicazioni profonde: l'inesistenza del tempo fondamentale

L'invarianza di riparametrizzazione ha conseguenze radicali:

Il parametro non è fisico (Gauge Freedom): Se non puoi distinguere fisicamente tra diverse parametrizzazioni, significa che il parametro stesso (quello che spesso chiamiamo "tempo" in questo contesto) non è una quantità fisica fondamentale e osservabile. È come una "libertà di gauge", una scelta arbitraria che usiamo per la descrizione matematica, ma che non corrisponde a nulla di misurabile nella realtà fisica profonda. Non esiste un "orologio universale" che misuri questo parametro.

Emergenza del "Tempo": In teorie con invarianza di riparametrizzazione, il "tempo" nel senso comune (cioè, un parametro che avanza e che possiamo misurare) deve emergere da altre osservabili del sistema. Ad esempio, si possono identificare certi gradi di libertà come "orologi" interni al sistema.

Problema del Tempo in Gravità Quantistica: Questa proprietà è al centro del cosiddetto "Problema del Tempo" nella gravità quantistica. Se non c'è un tempo fondamentale, come si può parlare di evoluzione temporale dell'universo? Le equazioni fondamentali di queste teorie spesso non contengono un parametro temporale esplicito.

Dove si trova l'invarianza di riparametrizzazione?

Relatività Generale: Le leggi della relatività generale sono invarianti sotto riparametrizzazioni dello spaziotempo. Non esiste un sistema di coordinate "preferito" od un tempo assoluto. La fisica deve essere la stessa indipendentemente da come si etichettano gli eventi nello spaziotempo.

Teoria delle Stringhe: Le azioni che descrivono il movimento delle stringhe (e delle brane) sono invarianti sotto riparametrizzazioni del loro "worldsheet" (la superficie bidimensionale che la stringa traccia nello spaziotempo).

In sintesi, l'**invarianza di riparametrizzazione** è la proprietà di una teoria fisica per cui il suo contenuto fisico non dipende dalla scelta del parametro utilizzato per descrivere le traiettorie o l'evoluzione. Questo implica che tale parametro non è un'osservabile fondamentale, portando ad una visione del tempo molto diversa da quella newtoniana.

GRUPPO DI DIFFEOMORFISMI

Il termine "**gruppo di diffeomorfismi**" è un concetto matematico che combina due idee: quella di **diffeomorfismo** e quella di **gruppo** (nel senso algebrico).

Analizziamoli separatamente e poi mettiamo insieme il tutto:

1. Diffeomorfismo

Un **diffeomorfismo** è una funzione (o mappa) tra due spazi che ha delle proprietà molto "belle" e regolari. Immagina di avere una linea o una superficie e di volerla "deformare" senza strapparla, bucarla o incollarne parti. Un diffeomorfismo fa proprio questo:

- **È una funzione liscia (infinitamente derivabile):** Non ci sono angoli acuti, discontinuità o salti. La trasformazione avviene in modo fluido.
- **È biiettiva:** Significa che è sia iniettiva (ogni punto di partenza va a un punto di arrivo unico) che suriettiva (ogni punto di arrivo proviene da un punto di partenza unico). In pratica, non ci sono punti che vengono "schiacciati" insieme o punti che rimangono senza un'origine. Questo implica che la funzione ha un'inversa.
- **La sua funzione inversa è anch'essa liscia:** Questa è la proprietà cruciale che distingue un diffeomorfismo da una semplice "funzione liscia e biiettiva". L'inverso deve essere altrettanto "ben educato" quanto la funzione originale.

In termini più semplici, un diffeomorfismo è una **trasformazione reversibile e infinitamente liscia** che preserva la struttura "differenziale" (cioè, come le cose cambiano localmente) dello spazio.

Esempio: Su un intervallo `I = [0, 1]`, la funzione `σ(t) = t^3` non è un diffeomorfismo su tutto l'intervallo `[0,1]` se consideriamo l'estremo 0 (la derivata `3t^2` è 0 in `t=0`, quindi l'inverso non sarebbe liscio in 0). Tuttavia, `σ(t) = t^3` è un diffeomorfismo su `(0, 1)`. Un esempio più semplice di diffeomorfismo sull'intervallo `[0,1]` a se stesso è `σ(t) = t` (la funzione identità) o `σ(t) = t/2 + 1/4` (se il dominio e codominio sono lo stesso intervallo, ma questa cambia l'intervallo, quindi un esempio migliore è `σ(t) = t`). In realtà, qualsiasi funzione crescente strettamente monotona e liscia da `[0,1]` a `[0,1]` con derivata mai nulla è un diffeomorfismo. Per esempio, `σ(t) = t` è un diffeomorfismo. `σ(t) = t^2` non è un diffeomorfismo su `[0,1]` per lo stesso motivo di `t^3`. `σ(t) = (t+1)/2` non è un diffeomorfismo da `[0,1]` a `[0,1]`.

Un ottimo esempio è `σ(t) = sin(pi*t/2)` su `[0,1]` a `[0,1]`, ma ha derivata nulla in 1. Un esempio classico su un intervallo aperto è `σ(t) = e^t` che mappa `R` a `R+`.

Per il contesto della formula, `σ: I -> I` è una funzione che prende un punto `t` nell'intervallo `I` e lo "rietichetta" come `σ(t)`, in modo liscio e reversibile.

2. Gruppo

In matematica, un **gruppo** è un insieme di elementi con un'operazione binaria (come l'addizione o la moltiplicazione) che soddisfa quattro proprietà fondamentali:

- 1. ***Chiusura:*** Il risultato dell'operazione tra due elementi del gruppo è sempre un elemento del gruppo.
- 2. ***Associatività:*** L'ordine in cui si eseguono più operazioni non cambia il risultato. (es. (a * b) * c = a * (b * c)).
- 3. ***Elemento Neutro (o Identità):*** Esiste un elemento nel gruppo che, combinato con qualsiasi altro elemento, lo lascia invariato (es. a * e = a).
- 4. ***Elemento Inverso:*** Per ogni elemento nel gruppo, esiste un altro elemento (il suo inverso) che, combinato con esso, produce l'elemento neutro (es. $a * a^{-1} = e$).

3. Gruppo di Diffeomorfismi $Diff^{+}(I)$

Combiniamo i due concetti:

* ***L'insieme:*** Consideriamo l'insieme di **tutti i possibili diffeomorfismi** dall'intervallo `I` a se stesso.

* ***L'operazione:*** L'operazione è la **composizione di funzioni** (indicata con `∘`). Se hai due diffeomorfismi `$\sigma_1$` e `$\sigma_2$`, la loro composizione `$\sigma_1 \circ \sigma_2$` (cioè, applicare prima `$\sigma_2$` e poi `$\sigma_1$`) è anch'essa un diffeomorfismo.

L'insieme, con l'operazione di composizione, forma un gruppo perché soddisfa tutte e quattro le proprietà:

1. ***Chiusura:*** La composizione di due diffeomorfismi è sempre un altro diffeomorfismo. (Se `f` è liscio e `g` è liscio, `f ∘ g` è liscio; se `f` e `g` sono biiettivi e hanno inversi lisci, lo è anche `f ∘ g`).

2. ***Associatività:*** La composizione di funzioni è sempre associativa.

3. ***Elemento Neutro:*** La funzione identità, `id(t) = t`, è un diffeomorfismo ed è l'elemento neutro (comporre con essa non cambia la funzione).

4. ***Elemento Inverso:*** Per definizione di diffeomorfismo, ogni diffeomorfismo `σ` ha un inverso `$\sigma^{-1}$` che è anch'esso un diffeomorfismo.

Il pedice "+" in $Diff^+(I)$

Il simbolo `+` (orienta-preservanti) aggiunge una condizione specifica: si considerano solo i diffeomorfismi che **mantengono l'orientazione** dell'intervallo. Su una linea, questo significa che se prendi due punti `$t_1 < t_2$`, la loro immagine `$\sigma(t_1)$` e `$\sigma(t_2)$` deve mantenere lo stesso ordine, cioè `$\sigma(t_1) < \sigma(t_2)$`. Matematicamente, questo implica che la derivata del diffeomorfismo `$\sigma'(t)$` deve essere sempre positiva (`$\sigma'(t) > 0$`).

Perché è importante "orienta-preservante" nel contesto del tempo?

Se `I` rappresenta un intervallo di tempo o di parametrizzazione, un diffeomorfismo orienta-preservante garantisce che non stiamo "invertendo" il flusso del tempo. Stiamo solo cambiandone la "velocità" o l'etichettatura, ma sempre in avanti.

Significato nella formula

Nel contesto della formula:

- Il gruppo di diffeomorfismi $Diff^+(I)$ rappresenta l'insieme di tutte le possibili "riparametrizzazioni valide" dell'intervallo di parametrizzazione `I`.
- Ogni elemento `σ` di questo gruppo è un modo diverso di "etichettare" o "scandire" i punti lungo una data storia `h`.
- La formula afferma che le quantità fisiche non devono dipendere dalla scelta di `σ`. Se prendiamo una storia `h` e la riparametrizziamo con un qualsiasi `σ` (ottenendo `$h \circ \sigma$`), il risultato di qualsiasi misurazione fisica `F` deve essere esattamente lo stesso: `$F(h) = F(h \circ \sigma)$`.

Questa è l'essenza dell'invarianza di riparametrizzazione e del perché il "tempo" come parametro esterno ed osservabile non esiste in queste teorie. La scelta di `σ` è una **libertà di gauge**, cioè una scelta arbitraria che non ha conseguenze fisiche osservabili.

CONCLUSIONI

Il principio di invarianza di riparametrizzazione non è solo una semplice simmetria formale, ma offre un'importante indicazione esistenziale: la fisica fondamentale non include il tempo come un suo elemento essenziale. L'analisi rivela che il parametro temporale, nelle teorie completamente covarianti, funge da pura libertà di gauge, una scelta descrittiva che non ha contenuto fisico intrinseco.

Da questa prospettiva, l'intera fenomenologia temporale—il flusso, l'irreversibilità e la stessa idea di "divenire"—si presenta come un **epifenomeno relazionale**. Essa non deriva da un tempo assoluto, ma emerge dalla dinamica delle correlazioni e dall'entanglement tra i gradi di libertà di un sistema atemporale. L'***orologio*** non misura un parametro esterno, ma registra il cambiamento dello stato di correlazione con il resto dell'universo.

Pertanto, la ricerca di una teoria della gravità quantistica e di una descrizione unitaria della realtà non dovrebbe cercare di "quantizzare il tempo", ma piuttosto di **superare il concetto** ad un livello fondamentale. Il futuro della fisica teorica potrebbe trovarsi nella piena accettazione di questo quadro atemporale, in cui l'universo non "accade nel tempo", ma **semplicemente è**, in una configurazione di relazioni invarianti.

Dr. Francesco Mappa

Bibliografia

Barbour, Julian. *The End of Time: The Next Revolution in Physics*. Oxford University Press, 1999.

Carroll, Sean M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2004.

DeWitt, Bryce S. "Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory." *Physical Review* 160, no. 5 (1967): 1113–1148.

Isham, Chris J. "Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time." In *Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories*, edited by L. A. Ibort and M. A. Rodríguez, 157–287. NATO ASI Series C: Mathematical and Physical Sciences, vol. 409. Kluwer Academic Publishers, 1993.

Kuchar, Karel V. "Time and Interpretations of Quantum Gravity." In *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics*, edited by G. Kunstatter, D. E. Vincent, and J. G. Williams, 211–314. World Scientific, 1992.

Misner, Charles W., Thorne, Kip S., and Wheeler, John Archibald. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company, 1973.

Rovelli, Carlo. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2004.

Rovelli, Carlo. *La realtà non è come ci appare: La struttura elementare delle cose*. Raffaello Cortina Editore, 2014. (Titolo originale: *Reality Is Not What It Seems: The Journey to Quantum Gravity*, Riverhead Books, 2016).

Wald, Robert M. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

Dichiarazione di finanziamento / Funding Statement

L’autore dichiara che la ricerca presentata in questo lavoro non ha beneficiato di alcun finanziamento specifico proveniente da enti pubblici, commerciali o senza scopo di lucro.

(The author declares that no funds, grants, or other financial support were received during the preparation of this manuscript.)

Francesco Mappa